Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

ANNEE 2019-2020
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
FILIERE SMI - S4
Prof. A. Rachadi

TRAVAUX DIRIGES – Electromagnétisme dans le vide

SERIE 1

EXERCICE 1

En intégrant les expressions des éléments géométriques infinitésimales :

- Calculer la surface d'une portion de cercle engendrée par un angle θ_0 et déduire la surface du cercle.
- Calculer la surface latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon R.
- Calculer de 2 manières différentes le volume d'une portion de fromage sachant qu'une boite de fromage de rayon $R = 5cm$ et de hauteur $h = 1{,}2cm$ contient 8 portions.
- Calculer le volume d'une portion de sphère de rayon R, et ayant angle d'ouverture θ_0. En déduire le volume de la sphère.

EXERCICE 2

Démontrer que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$; où Δ est l'opérateur Laplacien :

a. En utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées cartésiennes
b. En utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

EXERCICE 3

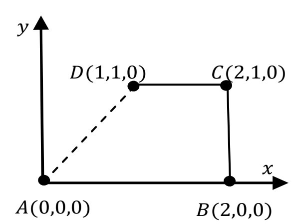
Démontrer que la divergence du rotationnel et le rotationnel du gradient sont nuls :

$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = 0$ et $\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}f\right) = \vec{0}$

EXERCICE 4

Soit le champ de vecteurs $\vec{F}$ défini sur l'espace comme suit : $\vec{F}(x,y,z) = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y - \vec{e}_z$

On se propose de calculer les circulations de $\vec{F}$ sur les deux chemins suivants : $ABCD$ et AD dans le plan $(x, y, z = 0)$ montré sur la figure suivante :



1. Calculer $C_1 = \int_{ABCD}\vec{F}.\overrightarrow{dl}$, puis $C_2 = \int_{AD}\vec{F}.\overrightarrow{dl}$
2. Que remarque-t-on ?
3. Calculer $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}$; déduire que $\vec{F}$ est un gradient, c.à.d qu'il existe un champ scalaire $f(x,y,z)$ tel que : $\vec{F} = \vec{\nabla}f$
4. Déterminer le champ scalaire $f(x,y,z)$ et déduire une autre manière de calculer C_1 et C_2.
5. Si on ajoute un point E(0,1,3). Calculer $\int_{ABCDE}\vec{F}.\overrightarrow{dl}$ puis $\oint_{ABEA}\vec{F}.\overrightarrow{dl}$

<u>EXERCICE 5</u> (facultatif)

Soit le champ de vecteurs $\vec{F}$ défini sur l'espace comme suit : $\vec{F}(x,y,z) = (1-x)\vec{e}_x + (z-x)\vec{e}_z$

1. Calculer le flux $\Phi = \iint_S \vec{F}.\overrightarrow{dS}$ de $\vec{F}$ à travers la surface d'un cube de coté a dont le centre est situé à l'origine du repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec x, y et $z \geq 0$.
2. Que remarque-t-on ?
3. Calculer $\vec{\nabla}.\vec{\mathrm{F}}$; déduire que $\vec{F}$ est un rotationnel, c.à.d qu'il existe un champ de vecteurs $\vec{A}(x,y,z)$ tel que : $\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{A}}$ (sans calculer $\vec{A}$)
4. Vérifier que $\vec{A}(x,y,z) = xy\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ vérifie cette propriété.
5. Déduire le résultat de la question 1.
6. Quel serait le flux de $\vec{F}$ à travers la surface d'une sphère de rayon R ?