

TD n°1:

Exercice 1

Ecrire le nombre décimal 25,125 en une représentation binaire.

$$25_{(10)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11001_{(2)}$$

$$0,125 \times 2 = \boxed{0},25$$

$$0,25 \times 2 = \boxed{0},5 \Rightarrow 0,125_{(10)} = 0,001_{(2)}$$

$$0,5 \times 2 = \boxed{1},0$$

finallement : $\boxed{25,125_{(10)} = 11001,001_{(2)}}$

Exercice 2

En arithmétique flottante avec 3 chiffres significatifs et arrondis, illustrer la non validité des lois d'associativité et de distributivité. (On pourra prendre $x = 854$, $y = 251$, $z = 852$)

Associativité:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= 0,854 \times 10^3 + (0,251 \times 10^3 + 0,852 \times 10^3) \\ &= 0,854 \times 10^3 + 0,11 \times 10^4 = 0,195 \times 10^4 = \boxed{1950} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (0,854 \times 10^3 + 0,251 \times 10^3) + 0,852 \times 10^3 \\ &= 0,111 \times 10^4 + 0,852 \times 10^3 = 0,196 \times 10^4 = \boxed{1960} \end{aligned}$$

donc $\boxed{x + (y + z) \neq (x + y) + z} \Rightarrow$ Non validité de l'associativité

Distributivité

$$x \cdot (y+z) = 0,854 \times 10^3 \times 0,11 \times 10^4 = 0,939 \times 10^6 = \underline{939000}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y + x \cdot z &= 0,854 \times 10^3 \times 0,251 \times 10^3 + 0,854 \times 10^3 \times 0,852 \times 10^3 \\ &= 0,214 \times 10^6 + 0,728 \times 10^6 = 0,942 \times 10^6 = \underline{942000} \end{aligned}$$

donc $\{x \cdot (y+z) \neq x \cdot y + x \cdot z\} \Rightarrow$ Non validité de la distributivité

Exercice 3

Résoudre les deux systèmes suivants :

$$(1) \begin{cases} x + y = 2 \text{ (1)} \\ x + 1,01 \cdot y = 2,01 \text{ (2)} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1,01 \cdot y = 2,02 \end{cases}$$

$$(1): \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 0,01y = 0,01 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{S = \{(1, 1)\}}$$

$$(2): \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 0,01y = 0,02 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{S = \{(0, 2)\}}$$

Conclusion:

Des petites erreurs peuvent donner des résultats différents.

Exercice 4

On cherche les racines du polynôme : $P(x) = (x-1)(x-2)(x-10)$

si on développe ce polynôme en une valeur approchée pour l'une des racines (par exemple 10,1) ; $P(x)$ devient : $P(x) = (x-10,1) \cdot Q(x)$

avec $Q(x) = x^2 + bx + c$. Calculer b et c. En déduire les racines de $Q(x)$, que remarquez-vous?

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-10) = x^3 - 13x^2 + 32x - 20$$

$$= (x-10,1)(x^2 + bx + c) = x^3 + (b-10,1)x^2 + (c-10,1 \times b)x - 10,1 \times c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-10,1 = -13 \\ c-10,1 \times b = 32 \\ -10,1 \times c = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2,9 \\ c = 1,98 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = x^2 - 2,9x + 1,98$$

Calculons les racines de Q :

$$\Delta = (2,9)^2 - 4 \times 1,98 = 0,49 = (0,7)^2$$

$$x_1 = \frac{2,9 - 0,7}{2} = 1,1 \quad ; \quad x_2 = \frac{2,9 + 0,7}{2} = 1,8$$

Remarque

- En changeant la valeur de l'une des racines de P au début les résultats changent également.

Exercice 5

On considère le polynôme $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), et on suppose que le discriminant $\Delta > 0$, on sait que:

$$(1) \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

1) Vérifier que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

2) Utiliser ce résultat pour que ces racines peuvent s'écrire sous

la forme: (2) $\begin{cases} x_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \\ x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \end{cases}$

3) Pour $S = 4$, trouver les racines de : $x^2 + 53,1x + 1 = 0$ en calculant :

i) x_2 à partir de (1) et la relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

ii) x_1 à partir de (2) et la relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Quel calcul donne le meilleur résultat ?

iii) Si on calcule d'abord x_2 , laquelle des formules (1) et (2) serait-il préférable de choisir ?

$$1) x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} ; \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{évident})$$

$$2) x_1 = \frac{c}{a} \times \frac{1}{x_2} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} ; \quad x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$3) i) b^2 - 4ac = 2815,61 = \underline{0,2816 \cdot 10^4}$$

$$x_2 = \frac{(-0,531 + 0,5307) \times 10^2}{2} = \underline{-0,2 \times 10^{-1}}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1} = -50 = \underline{0,5 \times 10^2}$$

$$ii) x_1 = \underline{-0,1883 \times 10^{-1}} \text{ et } x_2 = \underline{-0,5311 \times 10^2}$$

iii) La formule 2.