Université Mohammed V – Faculté des Sciences – Rabat
Filière SMI – Quatrième Semestre
2015 – 2016

Analyse numérique I

Série d'exercices n°2 (Systèmes linéaires)

Exercice 1.

1) Déterminer la solution du système linéaire

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1.0001 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6.0005 \end{pmatrix}$$

2) Même question pour le système (2) où l'on a remplacé 6.0005 par 6.
3) Calculer l'erreur relative sur les données et celle sur le résultat.
4) Résoudre graphiquement les systèmes (1) et (2) et conclure.

Exercice 2.

Résoudre par élimination de Gauss et en arithmétique exacte les systèmes linéaires suivants :

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + 3z &= 2 \\ 3x - 3y + z &= -1 \\ x + y &= 3 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{z}{6} &= 9 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} &= 8 \\ \dfrac{x}{2} + y + 2z &= 8 \end{cases}$$

Exercice 3.

En arithmétique flottante, avec trois chiffres significatifs et arrondi, résoudre par élimination de Gauss les systèmes linéaires (1) et (2) de l'exercice 2.

Exercice 4.

Déterminer la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.
Résoudre par la factorisation LU le système suivant :

$$\begin{cases} 1.012x - 2.132y + 3.104z &= 1.184 \\ -2.132x + 4.096y - 7.013z &= -5.049 \\ 3.104x - 7.013y + 0.014z &= -3.895 \end{cases}$$

Exercice 6.
Ecrire les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sous forme de systèmes itératifs pour résoudre le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq 0$, β, γ et δ étant des paramètres réels, puis fournir des conditions nécessaires et suffisantes de convergence.

Exercice 7.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est inversible.
2. On pose

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Pour $0 < \omega < 2$, montrer que la matrice

$$\left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right)$$

est inversible si, et seulement si,

$$\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Montrer alors que la méthode itérative, associée à la résolution du système $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$, et définie par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^3, \\ \left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right) x^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3\right) x^{(k)} + b \ , \quad k \geq 0 \ , \end{cases}$$

est convergente si, et seulement si, $\omega \in \left] \frac{2}{1+\sqrt{2}}, 2 \right[$.