Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
& Informatique

Année 2006-2007
SMA-SMI
Analyse Numérique(S_2)

Série n°2

Exercice 1.
1) Soit $y(x)$ une fonction continue sur $[a,b]$. Notons $x_0, x_1, ..., x_n$ une suite de points distincts de $]a,b[$.
Notons $y(x_i, x_j) = \delta y[x_i, x_j], ...y(x_0, x_1, ...x_n) = \delta^n y[x_0, x_1, ...x_n]$
Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $\forall x \in [a,b]$
$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y(x_0, x_1) + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_k)y(x, x_0, x_1, ..., x_k)$
2) On suppose que la fonction $y(x)$ est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$.
Montrer que $\forall x \in [a,b], \exists c_x \in [a,b]$ tel que

$$y(x, x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{y^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

3) Montrer que $y^{(p)}(x, x_0, x_1, ..., x_n) = y\left(\underbrace{x, ..., x}_{(p+1) \text{ fois}}, x_0, x_1, ..., x_n\right)$.

Exercice 2. Soit f une fonction 4 fois continuement dérivable sur $[a,b]$ dont on connait la valeur en des points équidistants x_0, x_1, x_2, x_3 où $x_i = a + ih \quad i = 0, 1, 2, 3$.
1) Donner une valeur approchée à l'aide du polynôme d'interpolation associé à la suite (x_0, x_1, x_2, x_3) des réels $f'(x)$ où $x = x_i$ et $x \neq x_i$. Expliciter l'erreur commise pour chacun des cas.
2) En déduire que :

$$f'(x_0) = \frac{1}{\alpha h}[af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2) + df(x_3)] + \beta h^3 f^{(4)}(\xi_{x_0})$$

Déterminer $\alpha, \beta, a, b, c, d$.
3) Soit $f : [1,4] \to R$ telle que $f(x) = \frac{1}{2x}$ considérons la suite $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.
Déduire la valeur approchée de $f'(1)$ et $f'(\frac{3}{2})$
4) Donner une majoration de l'erreur pour chacun des deux cas.

Exercice 3. Démontrer l'estimation du cours pour $m = 4$, *i.e.* si $f \in C^6(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors il existe une constante C telle que, $\forall\, h \leq h_0$,

$$\left| f^{(4)}(x_0) - \frac{\delta_h^4(x_0)}{h^4} \right| \leq Ch^2.$$

Exercice 4. Soit $f \in C^3(R,R)$ donnée, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ donnés. Soit $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ et soit g la fonction définie par:

$$g(x) = f(x_0) + \frac{\triangle_h f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\triangle_h^2 f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

1) Vérifier que $g(x_j) = f(x_j)$ pour $j = 0, 1, 2$ et en déduire qu'il existe $\xi_0 \in [x_0, x_1]$ et $\xi_1 \in [x_1, x_2]$ tels que $f'(\xi_0) = g'(\xi_0)$ $f'(\xi_1) = g'(\xi_1)$.
2) Soit r la fonction définie par $r(x) = f(x) - g(x)$.
Déduire de 1) qu'il existe $\eta \in [\xi_0, \xi_1]$ tel que $r''(\eta) = 0$ et donc $r''(x) = \int \eta^x r^{(3)}(t)dt = \int \eta^x f^{(3)}(t)dt$.
3) Déduire de 2) que $|f(x) - g(x)| \leq 2h^3 \max\limits_{t\in[x_0,x_2]} \left|f^{(3)}(t)\right|$ si $x \in [x_0, x_2]$. Comparer avec le développement de Taylor.

Exercice 5. Soit $f \in C\left([-1,+1], \mathbb{R}\right)$ donnée et soit p le polynôme de degré 2 qui interpole f en les points $-1,\ 0, +1$. Exprimer $\int_{-1}^{+1} p(t)dt$ en fonction de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$. Vérifier que la formule ainsi obtenue coincide avec la formule de Simpson.

Exercice 6. **1)** Appliquer les règles de Simpson et du trapèze pour $n = 6$ pour calculer l'intégrale de $\sin x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ à partir des 7 valeurs donnés dans le tableau suivant:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0.00000	0.25882	0.50000	0.70711	0.86603	0.96593	1.00000

2) Comparer les à la valeur exacte.Que peut-on conclure.

Exercice 7. Le polynôme de Legendre de degré M est défini par

$$L_M(t) = \frac{1}{2^M M!}\frac{d^M}{dt^M}\left[(t^2-1)^M\right].$$

1) Déterminer L_0, L_1 L_2 et L_3.

2) Montrer que pour $i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j$ on a $a\,\langle L_i, L_j\rangle = \int_{-1}^{+1} L_i(t)L_j(t) = 0.$

3) Montrer que L_M a exactement M zéros réels distincts tous compris dans $]-1,+1[$.

4) Montrer que la formule de Gauss-Legendre a M points est exacte pour les polynômes de degré $r = 2M - 1$

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ donné tel que $0 < \alpha < 1$, soit $t_1 = -1$, $t_2 = -\alpha$, $t_3 = \alpha$, $t_4 = +1$, et soit ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 quatre nombres réels. Nous considérons la formule de quadraure définie par $J(g) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j g(t_j)$, où $g \in C([-1,+1])$ donnée.

1) Trouver ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 en fonction de α tel que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p((t)dt$, pour tout polynôme p de degré 3.

2) Existe-t-il α tel que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$, pour tout polynôme p de degré r, avec $r > 3$?

Si oui, quelle est la valeur maximale de r et que valent alors α et ω_1, ω_2, ω_3, ω_4?

Exercice 9. Soient $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = \alpha$, où $\alpha \in]0,1]$, trois points distincts fixés dans l'intervalle $[-1,1]$.

Si g est une fonction continue définie sur $[-1,+1]$, on considère la formule de quadrature à trois points $J(g) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j g(t_j)$.

où ω_j, $j = 1,2,3$ sont les poids de la formule de quadrature.

1) Calculer les poids ω_1, ω_2, ω_3 en fonction de α pour que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré 2.

2) Existe-t-il α pour que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré 3? Si oui, donner la valeur de α et les poids ω_1, ω_2, ω_3. Sinon, justifier votre réponse.

3) Existe-t-il α pour que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré 4? Si oui, donner la valeur de α et les poides ω_1, ω_2, ω_3. Sinon, justifier votre réponse.

Exercice 10. Soit $-1 \leq t_1 < t_2 \leq +1$. Etant donné ces deux points, nous cherchons deux poids ω_1, ω_2 qui définiront la formule de quadrature: $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2)$, pour approcher $\int_{-1}^{+1} g(t)dt$, la fonction g étant continue sur $[-1,+1]$

1) Trouver les poids ω_1, ω_2 en fonction de t_1, t_2 tels que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 1.

2) Que deviennent les poids lorsque $t_1 = -t_2$

3)On considère le cas où $t_1 = -1$ et $t_2 = +1$. La formule est-elle exacte pour des polynômes de degré 2

4) On considère le cas où $t_1 = -\alpha$ et $t_2 = +\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. Pour quelle valeur de α, la formule de quadrature est-elle exacte pour des polynômes de degré 2?
la formule de quadrature ainsi définie est-elle exacte pour des polynômes de degré 3?
la formule de quadrature ainsi défini est-elle exacte pour des polynômes de degré 4?

Exercice 11. On définit la fonction $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-\infty, 1[$

1) Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt \quad x < 1$

2) Quelle est la valeur de $F(x)$ en $x = \dfrac{2}{3}$

3) Donner le degré et l'expression du polynôme de Lagrange qui interpole $g(x)$ aux points $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$.

4) Trouver les coefficients c_0, c_1, c_2 tels que pour tout polynôme P de degré ≤ 2 on ait:

$$\int_0^2 P(x)\,dx = c_0P(0) + c_1P(1) + c_2P(2)$$

5) En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précédente les coefficients d_0, d_1, d_2 tel que pour tout polynôme Q de degré ≤ 2 on ait:

$$\int_0^{\frac{2}{3}} Q(x)\,dx = d_0Q(0) + d_1Q\left(\frac{1}{3}\right) + d_2Q\left(\frac{2}{3}\right)$$

Utiliser cette formule pour donner une valeur approchée de $\log 3$

Exercice 12. Soit$\alpha \in]0, 1] \subset \mathbb{R}$ donné, soit $t_1 = -\alpha$, $t_2 = 0$, $t_3 = \alpha$, et soit ω_1, ω_2, ω_3, trois nombres réels. Nous considérons la formule de quadrature définie par $J(g) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \omega_j\, g(t_j)$,
où $g \in C([-1, +1]; \mathbb{R})$ donnée.

1) Trouver ω_1, ω_2, ω_3 en fonction de α de sorte que $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} p(t)dt$, pour tout polynôme p de degré 2.

2) Montrer qu'avec de tels poids $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 3.

3) Existe-t-il α tel que la formule de quadrature soit exacte pour les polynômes de degré 5? Si oui, calculer α et comparer avec les zéros du polynôme de Legendre de degré 3

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
& Informatique

Année 2006-2007
SMA-SMI
Analyse Numérique(S_2)

Série n°2

Correction des Exercices

Exercice1:

$y(x)$ est une fonction continue sur $[a, b]$, montrons que pour tout $k \in \{0, 1, ...n\}$ on a $\forall x \in [a, b]$
$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y(x_0, x_1) + ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_k)y(x, x_0, x_1, ..., x_k)$
On a :
$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\, y(x, x_0)$
$y(x, x_0) = y(x_0, x_1) + (x - x_1)\, y(x, x_0, x_1)$
$y(x, x_0, x_1) = y(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)\, y(x, x_0, x_1, x_2)$
.
.
.
.
.
$y(x, x_0, x_1, ...x_{k-1}) = y(x_0, x_1, x_2, ...x_k) + (x - x_k)\, y(x, x_0, x_1, x_2, ...x_k)$
On multiplie la seconde équation par$(x - x_0)$ la troisième équation par $(x - x_0)(x - x_1)$ et ainsi de suite la dernière équation étant multipliée par $(x - x_0)(x - x_1)........(x - x_{k-1})$,on obtient:
$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\, y(x, x_0)$
$(x - x_0)\, y(x, x_0) = (x - x_0)\, y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, y(x, x_0, x_1)$
$(x - x_0)(x - x_1)\, y(x, x_0, x_1) = (x - x_0)(x - x_1)\, y(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, y(x, x_0, x$
.
.
.
.
$(x - x_0)(x - x_1)........(x - x_{k-1})y(x, x_0, x_1, ...x_{k-1}) = (x - x_0)(x - x_1)........(x - x_{k-1})y(x_0, x_1, x_2, ...,x_k) + (x - x_0)(x - x_1)........(x - x_{k-1})(x - x_k)\, y(x, x_0, x_1, x_2, ...x_k)$
On additionne le tout et après simplification on obtient:
$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y(x_0, x_1) + ... + (x - x_0)(x - x_1).........(x - x_k)y(x, x_0, x_1, ..., x_k)$
2) On a d'après la question précédente:

$y(x) = P_n(x) + \pi(x)y\,(x, x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n)$ où $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de Newton associé aux points distincts $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ et $\pi\,(x) = (x - x_0)\,(x - x_1) \ldots\ldots\ldots (x - x_n)$

Or on sait que $\forall x \in [a, b]$, $\exists\, c_x \in [a, b]$ tel que :

$y(x) = P_n(x) + \pi\,(x)\,\dfrac{1}{(n+1)!}y^{(n+1)}\,(c_x)$

D'où : $\quad y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{y^{(n+1)}\,(c_x)}{(n+1)!}$

3) Montrons par récurrenceque:

$$y^{(p)}\,(x, x_0, x_{1,\ldots\ldots\ldots}, x_n) = y\left(\underbrace{x, x\ldots\ldots x}_{(p+1)fois}, x_0, x_1, \ldots\ldots x_n\right)$$

$p = 1$

$\dfrac{d}{dx}y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y\,(x+h, x_0, x_1, \ldots, x_n) - y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)}{h}$

Puisque la différence relative est symétrique 2 à 2 on obtient:

$\dfrac{d}{dx}y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{y\,(x+h, x_0, x_1, \ldots, x_n) - y\,(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)}{h}$

$\dfrac{d}{dx}y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lim\limits_{h\to 0} y\,(x+h, x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$

$\dfrac{d}{dx}y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lim\limits_{h\to 0} y\,(x+h, x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$

$\dfrac{d}{dx}y\,(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = y\,(x, x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre p *c.à.d* $y^{(p)}\,(x, x_0, x_{1,\ldots\ldots\ldots}, x_n) =$

$y\left(\underbrace{x, x\ldots\ldots x}_{(p+1)fois}, x_0, x_1, \ldots\ldots x_n\right)$ et montrons la à l'ordre $p+1$

$$y^{(p+1)}\,(x, x_0, x_{1,\ldots\ldots\ldots}, x_n) = \frac{d}{dx}y^{(p)}\,(x, x_0, x_{1,\ldots\ldots\ldots}, x_n)$$

$$y^{(p+1)}\,(x, x_0, x_{1,\ldots\ldots\ldots}, x_n) = \frac{d}{dx}y\left(\underbrace{x, x\ldots\ldots x}_{(p+1)fois}, x_0, x_1, \ldots\ldots x_n\right)$$

$$y^{(p+1)}\,(x, x_0, x_{1,\ldots\ldots\ldots}, x_n) = y\left(\underbrace{x, x\ldots\ldots x}_{(p+2)fois}, x_0, x_1, \ldots\ldots x_n\right)$$ d'où le résultat.

Exercice 2:

1) Cherchons le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_3\,(x)$ de degré 3 associé à f aux points x_0, x_1, x_2, x_3 où $x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, 3$

Soit $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ la base de Lagrange associée à ces points,

On a $P_3(x) = \sum\limits_{i=0}^{i=3} \varphi_i\,(x)\,f(x_i)$ où

$$\varphi_0(x) = -\frac{1}{6h^3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{2h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)$$
$$\varphi_3(x) = \frac{1}{6h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Or on sait que: $f(x) = P_3(x) + E(x)$ où $E(x) = \frac{1}{4!}\pi(x) f^{(4)}(\xi_x)$, avec $\pi(x) = \prod_{i=0}^{i=3}(x-x_i)$ et $\xi_x \in [x_0, x_3]$

donc $f'(x) = P_3'(x) + E'(x)$, d'où la valeur approchée du réel $f'(x)$ c'est $P_3'(x)$ avec une erreur de $E'(x)$

D'où: si $x = x_i$, $f'(x_i) = \sum_{j=0}^{j=3}\varphi_j'(x_i) f(x_j) + \frac{1}{4!}\pi'(x_i) f^{(4)}(\xi_{x_i})$

si $x \neq x_i$, $f'(x) = \sum_{i=0}^{i=3}\varphi_i'(x) f(x_i) + \frac{1}{4!}\pi'(x) f^{(4)}(\xi_x) + \frac{1}{4!}\pi(x) f^{(5)}(\xi_x)$

2) Si $x = x_0$ $f'(x_0) = \sum_{j=0}^{j=3}\varphi_j'(x_0) f(x_j) + \frac{1}{4!}\pi'(x_0) f^{(4)}(\xi_{x_0})$

Cherchons $\varphi_j'(x_0)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$ et $\pi'(x_0)$

$$\varphi_0'(x) = -\frac{1}{6h^3}[(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_3)]$$
$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{2h^3}[(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_3)]$$
$$\varphi_2'(x) = -\frac{1}{2h^3}[(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_3)]$$
$$\varphi_3'(x) = \frac{1}{6h^3}[(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2)]$$

D'où $\varphi_0'(x_0) = -\frac{11}{6h}$, $\varphi_1'(x_0) = \frac{3}{h}$, $\varphi_2'(x_0) = -\frac{3}{2h}$, $\varphi_3'(x_0) = \frac{1}{3h}$, $\pi'(x_0) = -6h^3$

Donc $f'(x_0) = \frac{1}{6h}[-11f(x_0) + 18f(x_1) - 9f(x_2) + 2f(x_3)] - \frac{1}{4}h^3 f^{(4)}(\xi_{x_0})$

D'où le résultat avec $\alpha = 6$, $a = -11$, $b = 18$, $c = -9$, $d = 2$ et $\beta = -\frac{1}{4}$

Exercice 3. $f \in C^{4+2}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = C^6(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(m = 4)$.

D'après le cours , nous avons

$$\delta_h^2(f(x_0)) = f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h),$$

et

$$\delta_h^4 f(x_0) = \delta_h(\delta_h^3 f(x_0)) = \delta_h(\delta_h(\delta_h^2 f(x_0)) = \delta_h^2(\delta_h^2 f(x_0)).$$

Puisque l'opérateur δ_h^2 est linéaire et en utilisant l'égalité ci-dessus, nous obtenons

$$\delta_h^4 f(x_0) = \delta_h^2 f(x_0+h) - 2\delta_h^2 f(x_0) + \delta_h^2 f(x_0-h)$$

(or par définition $\delta_h f(x_0) = f(x_0+\frac{h}{2}) - f(x_0-\frac{h}{2})$) donc nous avons

$$\begin{aligned}\delta_h^4 f(x_0) &= f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0) - 2f(x_0+h) + 4f(x_0)\\ &\quad -2f(x_0-h) + f(x_0) - 2f(x_0-h) + f(x_0-2h)\end{aligned}$$

$$\delta_h^4 f(x_0) = f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) + 6f(x_0) + f(x_0-2h) - 4f(x_0-h).$$

D'autre part, le D.L à l'ordre 6 de f au voisinage de x_0 nous assure que

$$\begin{aligned}f(x_0+2h) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{2h}{1!} + f''(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} +\\ &\quad + f^{(4)}(x_0)\frac{(2h)^4}{4!} + f^{(5)}(x_0)\frac{(2h)^5}{5!} + f^{(6)}(\eta_1)\frac{(2h)^6}{6!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_0-2h) &= f(x_0) - f'(x_0)2h + f''(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} - f^{(3)}(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} +\\ &\quad + f^{(4)}(x_0)\frac{(2h)^4}{4!} - f^{(5)}(x_0)\frac{(2h)^5}{5!} + f^{(6)}(\eta_2)\frac{(2h)^6}{6!},\end{aligned}$$

$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} + f^{(5)}(x_0)\frac{h^5}{5!} + f^{(6)}(\eta_3)\frac{h^6}{6!}$

$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} - f^{(3)}(x_0)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} - f^{(5)}(x_0)\frac{h^5}{5!} + f^{(6)}(\eta_4)\frac{h^6}{6!}$,

où $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4) \in]x_0, x_2+2h[\times]x_0-2h, x_0[\times]x_0, x_0+h[\times]x_0-h, x_0[$.
Après substitution dans la formule de $\delta_h^4 f(x_0)$, nous obtenons ($\delta_h^4 f(x_0) = f(x_0+2h) + f(x_0-2h) - 4f(x_0+h) - 4f(x_0-h) + 6f(x_0)$)

$$\delta_h^4 f(x_0) = f^{(4)}(x_0)h^4 + \left[\frac{64}{6!}(f^{(6)}(\eta_1) + f^{(6)}(\eta_2)) - \frac{4}{6!}(f^{(6)}(\eta_3) + f^{(6)}(\eta_4))\right] h^6.$$

Soit $h_0 \in]0, +\infty[$ fixé et soit

$$C = \frac{15}{90} \max_{x_0-2h_0 \leq x \leq x+2h_0} |f^{(6)}(x)|$$

Pour tout $h \leq h_0$, nous avons donc $\left|\frac{\delta_h^4 f(x_0)}{h^4} - f^{(4)}(x_0)\right| \leq ch^2$.

Exercice4:

$f \in C^3(R, R)$ donnée , soit $x_0 \in R$ et $h > 0$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + h$

$$g(x) = f(x_0) + \frac{\triangle_h f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\triangle_h^2 f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

où $\triangle_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ et $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, 2)$.

1) Il est clair que $g(x_0) = f(x_0)$. D'autre part, nous avons $g(x_1) = f(x_0) + \triangle_h f(x_0) = f(x_0 + h) = f(x_1)$, et

$$g(x_2) = f(x_0) + 2\triangle_h f(x_0) + \triangle_h^2 f(x_0)$$
$$g(x_2) = 2f(x_0 + h) - f(x_0) + \triangle_h^2 f(x_0).$$

or

$$\triangle_h^2 f(x_0) = \triangle_h(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \triangle_h f(x_0 + h) - \triangle_h f(x_0)$$
$$\triangle_h^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) - f(x_0 + h) + f(x_0)$$
$$\triangle_h^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0),$$

donc $g(x_2) = f(x_0 + 2h) = f(x_2)$. Posons $r(x) = f(x) - g(x)$.

Puisque $r(x_0) = r(x_1) = r(x_2) = 0$ et puisque $r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on peut utiliser le théorème de Rolle pour obtenir

$$\exists \zeta_0 \in]x_0, x_1[\text{ tel que } r'(\zeta_0) = 0 \quad \text{i.e. } f'(\zeta_0) = g'(\zeta_0),$$
$$\exists \zeta_1 \in]x_1, x_2[\text{ tel que } r'(\zeta_1) = 0 \quad \text{i.e. } f'(\zeta_1) = g'(\zeta_1),$$

2) Puisque $r'(\zeta_0) = r'(\zeta_1) = 0$ et puisque $r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on peut à nouveau utiliser le théorème de Rolle pour obtenir $\exists \eta \in]\zeta_0, \zeta_1[$ tel que $r''(\eta) = 0$.

Par conséquent, puisque r''' est continue, nous avons $r''(x) = r''(x) - r''(\eta) = \int \eta^x r^{(3)}(t)dt$.

Puisque g est un polynôme de degré deux il est clair que $r^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - g^{(3)}(t) = f^{(3)}(t)$ et donc $r''(x) = \int \eta^x f^{(3)}(t)dt$.

3) Considérons par exemple le cas où $x \in [x_0, x_1]$.

Le cas où $x \in [x_1, x_2]$ se traite de manière analogue.

D'après 1) , $r(x_0) = 0$ et donc $f(x) - g(x) = r(x) = r(x) - r(x_0) = \int_{x_0}^{x} r'(s)ds$.

Par conséquent, $|f(x) - g(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |r'(s)|\, ds \leq \max_{x_0 \leq s \leq x_1} |r'(s)|$. (*)

soit $s \in [x_0, x_1]$. D'après (a), $r'(\zeta_0) = 0$ et donc $r'(s) = r'(s) - r'(\zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{s} r''(t)dt$.

Par conséquent, $|r'(s)| \leq \left|\int_{\zeta_0}^{s} |r''(t)|\, dt\right| \leq \int_{x_0}^{x_1} |r''(t)|\, dt \leq h \max_{x_0 \leq t \leq x_1} |r''(t)|$. (**)

Soit $t \in [x_0, x_1]$. D'paèrs (b) $r''(t) = \int \eta^t f^{(3)}(u)du$, et par conséquent

$$|r''(t)| \leq \left| \int \eta^t f^{(3)}(u)du \right| \leq \int_{x_0}^{x_2} \left| f^{(3)}(u) \right| du \leq 2h \max_{x_0 \leq u \leq x_2} \left| r^{(3)}(u) \right|. \quad (***)$$

Les inégalités $(*)$, $(**)$ et $(***)$ impliquent donc

$$|f(x) - g(x)| \leq 2h^3 \max_{x_0 \leq u \leq x_2} \left| r^{(3)}(u) \right|.$$

Comparons ce résultat avec la formule de Taylor.
Soit $x \in [x_0, x_2]$ donné, puisque $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists \zeta \in [x_0, x]$ tel que

$$f(x) = G(x) + \frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}(x - x_0)^3$$

où G est le polynôme de degré deux défini par

$$G(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Par conséquent, lorsque $x \in [x - x_0]$, nous avons

$$|f(x) - G(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\zeta)}{6}(x - x_0)^3 \right| \leq \frac{(x_2 - x_0)^3}{6} \max_{x_0 \leq t \leq x_2} \left| f^{(3)}(t) \right|,$$

$$|f(x) - G(x)| = \frac{4}{3}h^3 \max_{x_0 \leq t \leq x_2} \left| f^{(3)}(t) \right|,$$

Interprétation: Nous avons donc à notre disposition deux polynômes de degré deux, g et G, permettant d'approcher une fonction $f \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, au voisinage d'un point $x_0 \in [x_0, x_2 + 2h]$ l'erreur maximale entre f et les polynômes g et G est d'ordre trois en h sur $[x_0, x_0 + 2h]$. Le polynôme G fait appel aux dérivées première et seconde de f au point x_0. Par contre, le polynôme g fait appel à des approximations numériques de ces dérivées.

Exercice5:

Soit $f \in C([-1, +1], \mathbb{R})$, alors le polynôme P de degré 2 qui interpole f en les points $t_0 = -1,\ t_1 = 0$ et $t_2 = +1$ s'écrit ainsi

$$p(t) = f(-1)\varphi_0(t) + f(0)\varphi_1(t) + f(1)\varphi_2(t)$$

où $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associées aux points $t_0 = -1,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1$ et est explicitée dans le cours exemple 1.1 (ch1). i.e.

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t,\ \varphi_1(t) = 1 - t^2,\ \varphi_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t.$$

un calcul simple donne

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = f(-1)\int_{-1}^{+1} \varphi_0(t)dt + f(0)\int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt + f(1)\int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt$$

$\int_{-1}^{+1} \varphi_0(t)dt = \frac{1}{3}$, $\int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt = \frac{4}{3}$, $\int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt = \frac{1}{3}$, et par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right).$$

Il semble donc naturel d'approcher $\int_{-1}^{+1} f(t)dt$ par la quantité $J(f)$ définie par

$$J(f) = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)).$$

Dans le chapitre 3, on appelera $J(f)$ formule de quadrature. Par construction, $J(f)$ intègre exactement les polynômes de degré 2 au sens où $\int_{-1}^{+1} q(t)dt = J(q) \quad \forall q \in \mathbb{P}_2$. Cette formule de quadrature s'appellera formule de Simpson.

Exercice6:

On va appliquer les règles de Simpson et du trapèze pour $n = 6$ pour calculer l'intégrale de $\sin x$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ à partir des sept valeurs tabulées en la table suivante:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0.00000	0.25882	0.50000	0.70711	0.86603	0.96593	1.00000

Après calcul la règle du Trapèze a donné $0,99429$ et celle de Simpson $1,00003$
En comparant à la valeur exacte soit 1 on obtient:

$|1 - J_T| \approx 5,71\ 10^{-3}$

$|1 - J_{\mathrm{Simp}}| \approx 3\ 10^{-5}$

On voit très bien que la règle de Simpson est meilleure.

Exercice 7. Soit $M \in \mathbb{N}$, $L_M(t) = \frac{1}{2^M M!}\frac{d^M}{dt^M}\left[(t^2-1)^M\right)$

1) $L_0(t) = 1,\ L_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}((t^2-1)) = t,$

$$L_2(t) = \frac{1}{4\times 2}\frac{d^2}{dt^2}((t^2-1)^2) = \frac{1}{8}\times\frac{d}{dt}\left[2\times 2t(t^2-1)\right]$$
$$L_2(t) = \frac{4}{8}\left[t^2-1+2t^2\right] = \frac{3t^2-1}{2},$$
$$L_3(t) = \frac{1}{8\times 6}\frac{d^3}{dt^3}((t^2-1)^3) = \frac{6}{8\times 6}\frac{d^2}{dt^2}\left[t(t^2-1)^2\right]$$
$$L_3(t) = \frac{1}{8}\frac{d}{dt}\left[(t^2-1)^2 + t\frac{d}{dt}(t^2-1)^2\right]$$
$$L_3(t) = \frac{2}{8}\frac{d}{dt}((t^2-1)^2 + \frac{t}{8}\frac{d^2}{d^2}\left[(t^2-1)^2\right]$$
$$L_3(t) = \frac{2\times 2\times 2}{4\times 2}t(t^2-1) + \frac{8}{8}t\,L_2(t)$$
$$L_3(t) = t(t^2-1) + \frac{t}{2}(3t^2-1)$$
$$L_3(t) = \frac{t}{2}\{3t^2-1+2t^2-2\} = \frac{t}{2}(5t^2-3)$$
$$L_3(t) = \frac{5}{2}t(t^2-\frac{3}{5})$$

2) Montrons que $\langle L_i, L_j\rangle = \int_{-1}^{+1} L_i(t)L_j(t) = 0$ si $i\neq j$, en effet, supposons $i>j$; on obtient alors en intégrant par partie

$$\langle L_i, L_j\rangle = \int_{-1}^{+1} L_i(t)L_j(t)dt = \frac{1}{2^{i+j}(i!)(j!)}\int_{-1}^{+1}\frac{d^i}{dt^i}(t^2-1)^i\frac{d^j}{dt^j}(t^2-1)^j dt$$

$$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{1}{2^{i+j}i!j!}(\left[\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}(t^2-1)i\,\frac{d^j}{dt^j}(t^2-1)^j\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}(t^2-1)^i\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}(t^2-1)^j dt)$$

Puisque $(t^2-1)^i$ a un zéro d'ordre i en 1 et en -1, la $(i-1)^{ième}$ dérivée de $(t^2-1)^i$ s'annule en $t=1$ et en $t=-1$. Ainsi nous obtenons

$$\int_{-1}^{+1} L_i(t)L_j(t)dt = \frac{(-1)}{2^{i+j}i!j!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}(t^2-1)^i\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}(t^2-1)^j dt.$$

En intégrant par partie j fois comme ci-dessus, nous obtenons:

$$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{(-1)^j}{2^{i+j}i!j!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}(t^2-1)^i\,\underbrace{\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}(t^2-1)^j}_{=(2j)!}\,dt$$

$$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{(-1)^j(2j)!}{2^{(i+j)}i!j!}\left[\frac{d^{i-j-1}}{dt^{i-j-1}}(t^2-1)^i\right]_{-1}^{1} = 0 \qquad (0\leq i-j-1\leq i-1).$$

3) Soit $t_1, t_2, ..., t_s$ les points strictement compris entre -1 et $+1$ en lesquels L_M change de signe.
Clairement ces points seront des zéros de L_M et on a donc $s \leq M$. Si on pose $p(t) = (t-t_1)(t-t_2).....(t-t_s)$ alors $p \in \mathbb{P}_s$ et, puisque p change aussi de signe en les points t_j, $1 \leq j \leq s$ on obtient $p(t)L_M(t) \geq 0 \quad \forall t \in [-1,+1]$ ou $p(t)L_M(t) \leq 0 \quad \forall t \in [-1,+1]$. Dans tous les cas, puisque $p(t)L_M(t) \neq 0$, on a $\langle p, L_M \rangle \neq 0$.
Puisque $L_0, L_1, ..., L_M$ forment une base de $\mathbb{P}_M$ alors il existe $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_s$ tels que $p(t) = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j L_j(t)$ et en utilisant la partie 2) on obtient

$$\langle p, L_M \rangle = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j \int_{-1}^{+1} L_j(t) L_M(t) dt = \alpha_s \langle L_s, L_M \rangle .$$

Puisque $\langle p, L_M \rangle = \int_{-1}^{+1} p(t) L_M(t) dt \neq 0$ on a nécessairement $s = M$ et donc les M zéros de L_M sont $t_1, t_2, ..., t_M$.
4) Nous allons montrer que la formule de Gauss-Legendre a M points est exacte pour les polynômes de degré $r = 2M - 1$. Pour celà, considérons $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ la formule de Gauss-Legendre à M points et soit p un polynôme de degré $2M-1$, alors nous pouvons définir pour $t \in \mathbb{R}$

$$\widetilde{p}(t) = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \varphi_j(t)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_M$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée aux points de Gauss $t_1, t_2, ..., t_M$.
Autrement dit, $\widetilde{p}$ est donc l'interpolant de p de degré $M-1$ aux points de Gauss $t_1, t_2, ..., t_M$.
Soit $q(t) = p(t) - \widetilde{p}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, alors $deg(q) = 2M-1$ tels que $q(t_j) = 0, \quad j = 1, .., M$.
Ainsi q est divisible par le polynôme v de degré M défini par: $v(t) = (t-t_1)(t-t_2).....(t-t_M) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ c-à-d il existe un polynôme w de degré $M-1$ tel que $q(t) = v(t)w(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Puisque v est un polynôme de degré M qui s'annule en les M zéros de L_M qui est lui même un polynôme de degré M, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) = \alpha L_M(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Puisque w est un polynôme de degré $M-1$, il existe $\beta_0, \ \beta_1, ..., \beta_{M-1}$ tels que

$$w(t) = \sum_{j=0}^{M-1} \beta_j L_j(t).$$

Ainsi donc,en utilisant la propriété d'orthogonalité des $L_j(t)$ (voir 2)),nous avons

$$\int_{-1}^{+1} q(t)dt = \int_{-1}^{+1} v(t)w(t)dt = \alpha \sum_{j=0}^{M-1} \beta_k \int_{-1}^{+1} L_M(t)L_k(t) = 0,$$

donc nous avons prouvé que

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = \int_{-1}^{+1} \widetilde{p}(t)dt,$$

et en fin, par définition de $\widetilde{p}$, nous obtenons

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt = \sum_{j=1}^{M} \omega_j p(t_j) = J(p).$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 8.
1) D'après la formule du théorème 3.2 du cours, nous obtenons

$$w_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt,$$

où les fonctions φ_j, $j = 1, 2, 3$ et 4 sont les polynômes de la base de Lagrange de $\mathbb{P}_3$ associée aux points $t_1 = -1$, $t_2 = -\alpha$, $t_3 = \alpha$ et $t_4 = +1$.
Puisque $\varphi_j(t) = \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \dfrac{(t-t_i)}{(t_j - t_i)}$ (Ici $n = 3$), alors nous avons

$$\varphi_1(t) = \frac{t+\alpha}{-1+\alpha}.\frac{t-\alpha}{-1-\alpha}.\frac{t-1}{-1-1}, \quad \varphi_2(t) = \frac{t+1}{-\alpha+1}\frac{t-1}{-\alpha-\alpha}.\frac{t-1}{-\alpha-1}$$

et donc

$$\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt = \frac{1}{3}.\frac{1-3\alpha^2}{1-\alpha^2}, \quad \omega_2 = \int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt = \frac{1}{3}.\frac{2}{1-\alpha^2}$$

Pour des raisons de symétrie, $\omega_4 = \omega_1$ et $\omega_3 = \omega_2$. Par construction $J(p)$ intègre exactement tout polynôme de degré 3.

2) Tout polynôme de degré r peut s'écrire $p(t) = at^r + q(t)$ où q est un polynôme de degré $r-1$ et $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$J(p) = a\sum_{j=1}^{4} \omega_j t_j^r + J(q) \text{ et}$$

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = a\int_{-1}^{+1} t^r dt + \int_{-1}^{+1} q(t)dt.$$

Donc, pour que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout plynôme p de degré r, il suffit que $J(q) = \int_{-1}^{+1} q(t)dt$ pour tout polynôme q de degré $r-1$ et que $J(t^r) = \int_{-1}^{+1} t^r dt$.
Nous procédons donc par étapes pour déterminer le degré maximal du polynôme pour lequel la formule de quadrature est exacte.
On a vu dans 1/ que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré 3. D'autre par

$$J(t^4) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j t_j^4 = \frac{2}{3}\frac{1-3\alpha^2+2\alpha^4}{1-\alpha^2} \text{ et } \int_{-1}^{+1} t^4 dt = \frac{2}{5}$$

Si $J(t^4) = \int_{-1}^{+1} t^4 dt$ on obtient $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et ainsi pour cette valeur de α, la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré 4 et nous obtenons $\omega_1 = \omega_4 = \frac{1}{6}$ et $\omega_2 = \omega_3 = \frac{5}{6}$ et la formule de quadrature s'écrit: $J(g) = \frac{1}{6}[g(-1) + g(1)] + \frac{5}{6}(g(\frac{-1}{\sqrt{5}}) + g(\frac{1}{\sqrt{5}}))$.
De même il est facile de vérifier que cette formule est aussi exacte pour le polynôme t^5 puisque

$$J(t^5) = 0 = \int_{-1}^{+1} t^5 dt$$

Par contre, elle ne l'est plus pour le plynôme t^6.

En effet,

$$J(t^6) = \frac{1}{6}((-1)^6 + (1)^6) + \frac{5}{6}((-\frac{1}{\sqrt{5}})^6 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^6) = \frac{26}{75}$$

$J(t^6) \neq \int_{-1}^{+1} t^6 dt = \frac{2}{7}$.

Ainsi la réponse à la $2^{ième}$ question de l'exercice est positive et on a $r = 5$.

Exercice 9:

1) D'après la formule du théorème 3.2 du cours, nous obtenons

$$w_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt,$$

où les fonctions φ_j, $j = 1, 2,$et 3 sont les polynômes de la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux points $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ et $t_3 = \alpha$

Puisque $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_j-t_i)}$ (Ici $n = 2$), alors nous avons

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} = \frac{t(t-\alpha)}{-(-1-\alpha)}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} = \frac{(t+1)(t-\alpha)}{-\alpha}$$

$$\varphi_3(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} = \frac{(t+1)t}{(\alpha+1)\alpha}$$

$$w_1 = \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt = \frac{1}{1+\alpha}\int_{-1}^{+1} t^2 - t\alpha = \frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{\alpha t^2}{2}\right]_{-1}^{+1}$$

$$w_1 = \frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} - (\frac{1}{3} - \left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{2}{3(1+\alpha)}$$

$$w_2 = \frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{+1} t^2 + (1-\alpha)t - \alpha = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{t^3}{3} + (1-\alpha)\frac{t^2}{2} - \alpha t\right]_{-1}^{+1}$$

$$w_2 = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{3} + \frac{1-\alpha}{2} - \alpha + \frac{1}{3} - \frac{(1-\alpha)}{2} - \alpha\right] = \frac{-1}{\alpha}(\frac{2}{3} - 2\alpha)$$

$$w_3 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int_{-1}^{+1} t^2 + t = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{3\alpha(\alpha+1)}$$

2)Par construction, $J(p)$ intègre exactement tout polynôme p de degré 2.

Pour que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout $p \in \mathbb{P}_3$, il suffit de vérifier que $J(t^3) = \int_{-1}^{+1} t^3 dt$; en effet

$$J(t^3) = -\omega_1 + \omega_3\alpha^3$$

et, d'autre part $\int_{-1}^{+1} t^3 dt = \frac{1}{4}[t^4]_{-1}^{+1} = 0$.
donc $J(t^3) = -w_1 + w_3\alpha^3 = 0$
$\alpha^2 = 1$ et $\alpha \neq -1 \Longrightarrow \alpha = 1$
donc $\omega_1 = w_3 = \frac{1}{3}$ et $w_2 = \frac{4}{3}$ d'où on obtient la formule de quadrature de Simpson.
3) pour $r = 4$,on a $\int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{2}{5}$ $J(t^4) = \frac{2}{3}$ donc il n'exixte pas de α Pour que la formule de quadrature soit exacte pour les polynômes de degré 4.

Exercice 10:
Soit $-1 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ et $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2)$

1) Cherchons les poids ω_1, ω_2 en fonction de t_1 et t_2 tel que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)\, dt$ pour tout polynôme p de degré 1 Les valeurs de ω_1 et ω_2 en fonction de t_1 et t_2 tel que $J(p) = \sum_{j=1}^{2} \omega_j p(t_j) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout $p \in \mathbb{P}_1$ sont données par

$$\omega_i = \int_{-1}^{+1} \varphi_i(t)dt,$$

où les fonctions φ_i, $i = 1, 2$ sont les polynômes de la base de Lagrange de $\mathbb{P}_1$ associée aux points t_1, t_2 Puisque $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{(t - t_i)}{(t_j - t_i)}$ (Ici $n = 1$). Alors nous avons

$$\varphi_1(t) = \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}, \quad \varphi_2(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

donc
$$\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt = \frac{-2t_2}{t_1 - t_2},$$
$$\omega_2 = \int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt = \frac{-2t_1}{t_2 - t_1}$$

2) Si $t_1 = -t_2$ alors $\omega_1 = \omega_2 = 1$.
3) Si $t_1 = -1$ et $t_2 = 1$ alors $\omega_1 = \omega_2 = 1$,
a-t-on $J(t^2) = \int_{-1}^{+1} t^2 dt = \frac{1}{3}[t^3]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3}$? or $J(t^2) = 2$ donc la formule n'est pas exacte pour les polynôme de degré 2
4) Si $t_1 = -\alpha$ et $t_2 = \alpha$ alors $\omega_1 = \omega_2 = 1$

cherchons α pour que la formule de quadrature soit exacte pour les polynomes de degré2 $J(t^2) = \int_{-1}^{+1} t^2 dt \Longrightarrow (\omega_1 + \omega_2)\alpha^2 = \frac{2}{3}$ Comme $0 < \alpha < 1$, on a $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt \ \forall p \in P_2$, si et seulement si $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ La formule de quadrature $J(g) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est donc exacte pour les polynôme de degré $r = 2$. De plus , lorsque $p(t) = t^3$, on a $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt = 0$, la formule de quadrature $J(g) = g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est exacte pour des polynôme de degré $r = 3$. On vérifie sans peine que cela n'est pas le cas pour des degrés r plus élevés en prenant par exemple $p(t) = t^4$.

Exercice 11:

On définit la fonction $g(x) = \frac{1}{1-x} \ \forall x \in]-\infty, 1[$

1) $F(x) = -\log(1-x)$

2) $F(\frac{2}{3}) = \log 3$

3) Le polynôme de lagrange qui interpole g en trois points $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ est de degré 2 et il est donné par: $P_2(x) = \frac{9}{2}x^2 + 1$

4) On pose $p(x) = 1, p(x) = x$ et $p(x) = x^2$, on trouve le système suivant:

$$\begin{cases} \int_0^2 1dx = 2 = c_0 + c_1 + c_2 \\ \int_0^2 x\, dx = 2 = c_1 + 2c_2 \\ \int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3} = c_1 + 4c_2 \end{cases} \Longrightarrow c_0 = c_2 = \frac{1}{3},\ c_1 = \frac{4}{3}$$

5) On peut effectuer le changement de variable $x = 3y$ on a: $\int_0^2 p(x)\, dx = 3\int_0^{\frac{2}{3}} q(y)\, dy$

ce qui donne $d_i = \frac{1}{3}c_i$ d'où $d_0 = d_2 = \frac{1}{9},\ d_1 = \frac{4}{9}$

Utilisons cette formule pour donner une valeur approchée de $\log 3$

$$F(\frac{2}{3}) = \log 3 = \int_0^{\frac{2}{3}} g(y)\, dy$$

Or $\int_0^{\frac{2}{3}} g(y)\, dy$ est approchée par $\int_0^{\frac{2}{3}} P_2(y)dy = d_0P_2(0) + d_1P_2\left(\frac{1}{3}\right) + d_2P_2\left(\frac{2}{3}\right)$ Donc on trouve $\log 3 \approx \frac{10}{9}$.

Exercice 12

1)Soit $\alpha \in]0,1] \subset \mathbb{R}$. Les valeurs de ω_i en fonction α tel que $J(p) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j g(t_j) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$ sont données par

$$\omega_i = \int_{-1}^{+1} \varphi_i(t)dt,$$

où les fonctions $\varphi_i,\ i = 1,2,3$ sont les polynômes de la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux points $t_1 = -\alpha,\ t_2 = 0,\ t_3 = \alpha$. Puisque $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{(t-t_i)}{(t_j-t_i)}$ (Ici $n = 2$). Alors nous avons

$$\varphi_1(t) = \frac{t}{\alpha}.\frac{t-\alpha}{2\alpha}, \quad \varphi_2(t) = \frac{t+\alpha}{\alpha}.\frac{t-\alpha}{-\alpha}$$

donc

$$\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt = \frac{1}{2\alpha^2},$$
$$\omega_2 = \int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt = \frac{-2}{3\alpha^2} + 2.$$

Pour des raisons de symétrie, $\omega_3 = \omega_1$. Par construction, $J(p)$ intègre exactement tout polynôme p de degré 2.

2) Pour que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout $p \in \mathbb{P}_3$, il suffit de vérifier que $J(t^3) = \int_{-1}^{+1} t^3dt$; en effet

$$J(t^3) = \omega_1(-\alpha)^3 + \omega_2.0 + \omega_3\alpha^3 = 0,$$

et, d'autre part $\int_{-1}^{+1} t^3 dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} t^3 dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_{-1}^{+1} = 0.$

3) Nous avons $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout $p \in \mathbb{P}_4$, si $J(t^4) = \int_{-1}^{+1} t^4 dt$. Puisque $J(t^4) = \omega_1(-\alpha)^4 + \omega_2.0 + \omega_3\alpha^4 = 2\omega_1\alpha^4$, et puisque $\int_{-1}^{+1} t^4 dt = \frac{2}{5}$, il suffit donc que $\omega_1\alpha^4 = \frac{1}{5}$ c'est à dire $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} \in]0,1]$.

Finalement nous vérifions facilement que $J(t^5) = \int_{-1}^{+1} t^5 dt = 0$ et donc la formule de quadrature est exacte pour un polynôme de degré 5 lorsque $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

D'après l'exercice 7. 1/, le polynôme de Legendre L_3 est donné par $L_3(t) = \frac{5}{2}t(t^2 - \frac{3}{5})$, il s'annulle donc pout $t = 0$ et $t = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. La formule de quadrature correspondant au choix $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ est donc la formule de Gauss-Legendre à 3 points. Elle est bien exacte pour les polynôme de degré $r = 2 \times 3 - 1 = 5$.