

TD 3:

Résolution d'une équation $f(x) = 0$

Exercice 1

La fonction $x \mapsto \lg(x) - x$ est continue sur $[4; 4,7]$

	a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	f(a)	f(c)	f(b)
$d=1$	4	4,35	4,7	<0	<0	>0
$d=2$	4,35	4,525	4,7	<0	>0	>0
$d=3$	4,35	4,4375	4,525	<0		
		⋮				
		⋮				
$d=9$		4,492871				

Précisions 10^{-2}

La solution 4,492871 après 9 itérations.

Précision : 10^{-5}

La solution 4,493410 après 19 itérations.

Exercice 2:

$$e^x - 4x = 0 \quad \text{On pose } f(x) = e^x - 4x$$

1) $x \geq 0$: $f(x) = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 \in]0; \ln(4)[$$

$$x_2 \in]\ln(4); +\infty[$$

2) Après 24 itérations sur l'intervalle $[0, 1]$ avec une précision de 10^{-7} près, la solution $x = 0,3571403$

3) Nous avons : $\frac{b-a}{2^n} \leq 10^{-8}$ ce qui donne $\frac{b-a}{10^{-8}} \leq 2^n$

donc
$$n \geq \frac{\log(b-a) + 8}{\log(2)}$$

Puisque $a=2$ et $b=2,5$ alors : $\boxed{n = 26}$

Exercice 3 :

1) Soit x une racine k -ième d'un nombre a .

Alors $x^k = a$, ceci implique $x^k - a = 0$

On pose $f(x) = x^k - a$.

La méthode de Newton :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Puisque $f'(x) = kx^{k-1}$, alors on a : $\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \end{cases}$

Entrées: $a, x_0, k, N_0, \varepsilon$

Sorties: x : l'approximation de la racine k -ième

Début

lire ($a, x_0, k, N_0, \varepsilon$);

tantque ($i \leq N_0$) faire

$$x_1 \leftarrow \frac{1}{k} \left((k-1)x_0 + \frac{a}{x_0^{k-1}} \right);$$

si ($|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$) alors

écrire (x_1 , "Solution");

Sinon

$$x_0 \leftarrow x_1;$$

$$i \leftarrow i + 1;$$

fa

Fin tantque

écrire (x_1 , "la solution");

Fin

2) On pose: $G(x) = \sqrt{2+x}$

on obtient $\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1} = G(P_n) \end{cases} ; n \in \mathbb{N} \quad (1)$

- La fonction G est continue sur $[-2; +\infty[$
- G est dérivable, telle que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} < 1$

Soit l la limite de la suite (1), donc: $l = G(l)$ "point fixe de G "

Alors: $l^2 = 2 + l \quad (\Rightarrow) \quad l_1 = -2 \quad ; \quad l_2 = 2$

Puisque $p_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2$

Nous avons $G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$ alors $G'(2) = \frac{1}{4} \neq 0$

Donc la convergence est linéaire.

Exercice 6

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

Soit x^* une racine de f .

On dit que x^* est de multiplicité m ssi :

$$f^{(1)}(x^*) = f^{(2)}(x^*) = f^{(3)}(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$$

et $f^{(m)}(x^*) \neq 0$

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

$$\Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = 24x - 12$$

$$\Rightarrow f'''(1) = 12 \neq 0$$

• $f(x) = (x-1)^3(x+1)$ (division Euclidienne)

On pose $G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$\rightarrow$ Si $G'(x^*) = 0$ et $G''(x^*) \neq 0$, alors l'ordre de convergence est 2.

$\rightarrow$ Si $G'(x^*) \neq 0$, alors l'ordre de convergence est 1.

$$G'(x) = 1 - \frac{(3(x+1) + (x-1))^2 - 12x(x+1)}{(3(x+1) + (x-1))^2}$$

donc $G'(1) = 1 - \frac{1}{3} \neq 0$

d'où l'ordre de convergence est 1.

Remarque:

Si x^* est de multiplicité m alors $G'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}$

2) On pose $G(x) = x - 3 \frac{f(x)}{f'(x)}$

Puisque $f(x) = (x-1)^3 h(x)$, avec $h(x) = x+1$

alors

$$G'(x) = \frac{-2(3(x+1) + (x-1))^2 + 18(x+1)^2 + 6(x-1)(x+1)}{(3(x+1) + (x-1))^2}$$

donc $G'(1) = 0$ et $G''(1) \neq 0$ (à vérifier)

d'où l'ordre de convergence est 2.

Remarque

Si m est l'ordre de multiplicité d'une racine α de f ,
alors la méthode de Newton "modifiée"

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est convergente d'ordre 2.