

→ TD n°4 : Interpolation / Derivation - Intégration

Exercice 1

- Lagrange -

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \text{ avec } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

1) $P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$, avec

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{x - 2}{-4} ; \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x + 2}{4}$$

donc $P_1(x) = -x + 2 + 2x + 4 = \boxed{x + 6}$

on peut vérifier que $P_1(x_i) = f(x_i) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P_1(-2) &= 4 = y_0 \\ P_1(2) &= 8 = y_1 \end{aligned}$$

- Newton Cote -

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1], \text{ avec}$$

$$f[x_0] = f(x_0) = 4 \text{ et } f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = 1$$

donc $P_1(x) = 4 + (x + 2) = \boxed{x + 6}$

Démontrer :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \end{aligned}$$

2) Lagrange:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dots$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dots$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dots$$

etc ...

De même pour Newton-Côtes...

Exercice 2

1- $P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -x^2 + 2x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

donc $P_2(x) = -x^2 + 2x + 4(x^2 - x) = \boxed{3x^2 - 2x}$

2-

x	$P_2(x)$	$f(x) = x^3$
0,9	0,63	0,729
1,1	1,43	1,331
1,99	7,9003	7,8805
2,1	9,03	9,261
5	65	125

$\Rightarrow$ L'interpolation polynômiale ne fournit des résultats acceptables qu'au voisinage des points d'interpolation.

3-

L'erreur commise est donnée par :

$$\exists \xi \in]0, 2[\text{ tel que } f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x(x-1)(x-2)$$

Puisque $f(x) = x^3$ alors $\frac{f^{(3)}(\xi)}{6} = 1$

donc $f(x) - P_2(x) = x(x-1)(x-2)$

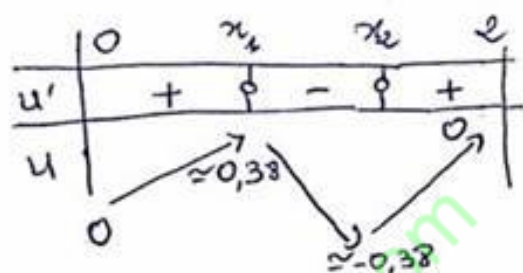
ce qui implique :

$$|f(m) - P_2(m)| \leq \max_{x \in [0,2]} |x^3 - 3x^2 + 2x|$$

on pose $u(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$u'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\Delta = 12 \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$



u atteint son maximum au point $x^* = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, donc

$$\max_{x \in [0,2]} u(x) = u(x^*) \approx 0,38$$

d'où $\boxed{|f(m) - P_2(m)| \leq 3,8 \times 10^{-1}}$

Exercice 3 :

1- Le polynôme d'interpolation P_2 :

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x^2 - 1,5x + 0,5}{0,5}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x^2 - x}{-0,25}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x^2 - 0,5x}{0,5}$$

Donc $P_2(x) = \frac{x^2 - 1,5x + 0,5}{0,5} + \frac{(-e^{1/2}(x^2 - x))}{0,15} + \frac{e(x^2 - 0,5x)}{0,5}$

=

Le polynôme d'interpolation P_2 :

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x$$

$$L_2(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Donc $P_1(x) = 1-x + ex = (e-1)x + 1$

2) i) Pour P_2 :

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} x(x-0,5)(x-1) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6} x(x-0,5)(x-1)$$

ii) $\exists \eta > 0 : |f^{(3)}(\xi_x)| \leq \eta$ donc :

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{|f^{(3)}(\xi_x)|}{6} |x(x-0,5)(x-1)|$$

d'où :

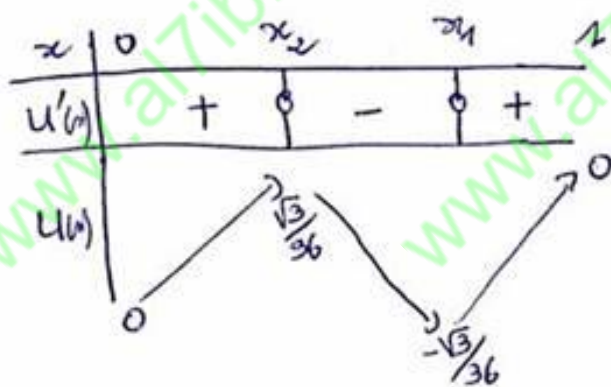
$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\eta}{6} |x(x-0,5)(x-1)|$$

iii) $\forall x \in [0,1] : |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\eta}{6} \max_{x \in [0,1]} |u(x)|$

avec $u(x) = x(x-0,5)(x-1)$

$$u'(x) = 3x^2 - 3x + 0,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

✓



$U(x)$ atteint son maximum au point $x^* = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

donc : $|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\sqrt{7}}{6} \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{216}$

d'où $|f(x) - P_2(x)| \leq 8,01 \times 10^{-3}$

Conclusion

En augmentant le degré du polynôme d'interpolation, l'erreur diminue.

Exercice 4

	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
Centrale X		$\frac{1-0,992}{1,0-0,8}$	---	---	X
Progressive ---		$\frac{1-0,999}{1,0-0,9}$	---	---	X
Régressive X		$\frac{0,999-0,992}{0,9-0,8}$	---	---	

De même pour le reste ---

Exercice 5 (Les points sont équidistants $\Rightarrow$ Formule de Taylor)

$$DP: y'(1) = \frac{y(1,1) - y(1,0)}{1,1 - 1} = \frac{1,001 - 1}{0,1} = \frac{0,001}{0,1} = 0,01$$

$$DR: y'(1) = \frac{y(1) - y(0,9)}{1 - 0,9} = \frac{1 - 0,999}{0,1} = \frac{0,001}{0,1} = 0,01$$

$$DC: y'(1) = \frac{y(1,1) - y(0,9)}{1,1 - 0,9} = \frac{1,001 - 0,999}{0,2} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01$$

$$DP (3 \text{ points}): y'(1) = \frac{-y'(1,2) + 4y(1,1) - 3y(1)}{1,2 - 1} = \frac{\quad}{0,2} =$$

$$DR (3 \text{ points}): y'(1) = \frac{3y(1) - 4y(0,9) + y(0,8)}{1 - 0,8} = \frac{\quad}{0,2} =$$

Exercice 6 (Les points ne sont pas équidistants $\Rightarrow$ Polynôme d'interpolation)

Le polynôme d'interpolation de Lagrange en trois points est donné par:

$$P(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

avec :

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

L'approximation de la dérivée est donnée par: $f'(x) = P'(x)$ avec:

$$P'(x) = y_1 L_1'(x) + y_2 L_2'(x) + y_3 L_3'(x)$$

$$\text{Donc } f'(x) = y_1 \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Dans notre cas : $x_1 = 4$, $x_2 = 9$ et $x_3 = 16$

Ce qui donne :

$$y'(4) = 2 \frac{8 - 9 - 16}{-5 \times -12} + 3 \frac{8 - 4 - 16}{5 \times -7} + 4 \frac{8 - 4 - 9}{12 \times 7}$$

$$\boxed{y'(4) = 0,22}$$

Exercice 7

$$\text{Nous avons : } y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$\text{On pose : } x_i = 2, \quad x_{i+1} = 3 \quad \text{et} \quad x_{i-1} = 1$$

avec $h = 1$

$$\text{On obtient : } \boxed{y''(2) = \frac{y(3) - 2y(2) + y(1)}{1^2} = 2}$$

$$\text{Nous avons : } y'''(x_i) = \frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) + 2y(x_{i-1}) - y(x_{i-2}))}{2h^3}$$

$$\text{On pose : } x_i = 2, \quad x_{i+1} = 3, \quad x_{i+2} = 4, \quad x_{i-1} = 1$$

$$\text{et } x_{i-2} = 0$$

avec $h = 1$

Donc $\boxed{y'''(2) = \frac{y(4) - 2y(3) + 2y(1) - y(0)}{2} = 0}$

Exercice 8

Formule du trapèze : $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$

donc $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} (\sin^2(0) + \sin^2(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{4}}$

Formule de Simpson : $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \frac{\frac{\pi}{2}}{6} (\sin^2(0) + 4\sin^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{4}}$

On a : $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx$$

$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 9

$$1 - \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin(\pi x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sin(\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{4} (0 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} (\frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{4}$$

Le calcul exact de $\int_0^1 x \sin(\pi x) dx$ donne $\frac{1}{\pi}$

$$3- \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin(\pi x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sin(\pi x) dx$$

$$= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \right) + \frac{1}{12} \left(0 + 3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \right)$$
$$\boxed{= \frac{1}{12} (1 + 2\sqrt{2})}$$

$$2) \quad h = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \frac{1}{8} \left(f(0) + 2 \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right) + f(1) \right) \\ = \frac{1+\sqrt{2}}{8} \approx \underline{0,3017}$$

$$4) \quad h = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \frac{1}{12} \left(f(0) + 4 \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right) + 2 f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) \\ \approx \frac{1+2\sqrt{2}}{12} \approx \underline{0,3190}$$

Exercice 10

ona $f(x) = x \sin(\pi x)$

donc $f'(x) = \pi \cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x)$

et $f''(x) = -3\pi^2 \sin(\pi x) - \pi^3 x \cos(\pi x)$

et $f'''(x) = -4\pi^3 \cos(\pi x) + \pi^4 x \sin(\pi x)$

Cas 1 $h = \frac{1}{2}$ Soit $\eta \in]0, 1[$

$$E(f) = -\frac{1}{12} f''(\eta) \frac{1}{4} = -\frac{1}{48} f''(\eta)$$

$$\Rightarrow |E(f)| = \frac{1}{48} |f''(\eta)| < \frac{1}{48} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$$

Puisque $\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| < 2\pi + \pi^2$

Alors $|E(f)| \leq \frac{2\pi + \pi^2}{48} \approx \underline{0,3365}$

$|\text{Erreur exacte}| = \left| \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right| = \underline{0,0683}$

Cas 2

$$\dots \Rightarrow |E(f)| \leq \frac{2\pi + \pi^e}{192} \approx \underline{0,0841}$$

$$|\text{Erreur exacte}| = \left| \frac{1}{\pi} - 0,3017 \right| = 0,0167$$

Cas 3 $h = \frac{1}{2}$ Soit $\eta \in]0,1[$

$$E(f) = -\frac{1}{180} f^{(4)}(\eta) \frac{1}{16} = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}$$

$E(f)$ $\rightarrow$ estimation d'erreur
 $|\text{Erreur exacte}|$ $\rightarrow$ erreur exacte

$$\Rightarrow |E(f)| \leq \frac{1}{2880} \max_{0 \leq x < 1} |f^{(4)}(x)|$$

Puisque $\max_{0 \leq x < 1} |f^{(4)}(x)| < 4\pi^3 + \pi^4$ (majoration en valeur absolue)

$$\text{donc } |E(f)| \leq \frac{4\pi^3 + \pi^4}{2880} \approx \underline{0,0768}$$

$$|\text{Erreur exacte}| = \left| \frac{1}{\pi} - 0,319 \right| = \underline{0,0007}$$

Cas 4

$$\dots \Rightarrow |E(f)| \leq \frac{4\pi^3 + \pi^4}{46080} \approx \underline{0,0048}$$

$$|\text{Erreur exacte}| = \left| \frac{1}{\pi} - 0,319 \right| = \underline{0,0007}$$

$\rightarrow$ L'erreur exacte est inférieure à l'estimation d'erreur dans les quatre cas.