Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Filières : SMI

Série 4.
Interpolation polynômiale
Dérivation-Integration

Exercice I :

1) Déterminer par les méthodes de Lagrange et de Newton-Côtes, les polynômes d'interpolation $P_1(x)$ de degré 1 tel que $P_1(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$ où $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1$, $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ et $(x_1, y_1) = (2, 8)$

2) Déterminer par les méthodes de Lagrange et de Newton-Côtes, les polynômes d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 tel que $P_2(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$ et 2 où $y_i = f(x_i)$ $i = 0, 1$ et 2, $(x_0, y_0) = (-2, 4), (x_1, y_1) = (0, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 8)$. Conclusion.

Exercice II : On suppose que $(x_0, y_0) = (0, 0), (x_1, y_1) = (1, 1)$ et $(x_2, y_2) = (2, 8)$

1) Déterminer par la méthode de Lagrange, le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ de degré 2 tel que $P_2(x_i) = y_i; i = 0, 1, 2$.

2) Calculer $P_2(x)$ et $f(x) = x^3$ pour $x = 0.9, 1.1, 1.99, 2.1$ et 5. Conclusion.

3) Déterminer l'erreur commise si on remplace dans l'intervalle $[0, 2]$, $f(x) = x^3$ par $P_2(x) = 3x^2 - 2x$.

Exercice III : On suppose que $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (0.5, e^{\frac{1}{2}}), (x_2, y_2) = (1, e)$

1) Déterminer les polynômes d'interpolation de Lagrange, pour les points $(x_i : i = 0, 1, 2)$.

2) i) Déterminer les expressions des erreurs d'interpolation polynômiale,

ii) Déterminer des bornes des erreurs d'interpolation polynomiale Indépendantes de ξ où $\xi = \xi(x)$.

iii) Déterminer des bornes des erreurs d'interpolation polynomiale Indépendantes de ξ et de x. Conclure.

Exercice IV : Considérons les proplèmes suivants :

$$
\begin{aligned}
x &= [0.8 \quad 0.9 \quad 1.0 \quad 1.1 \quad 1.2] \\
y &= [0.992 \quad 0.999 \quad 1.000 \quad 1.001 \quad 1.008] \\
& \quad et \\
x &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \\
y &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]
\end{aligned}
$$

donner des approximations des dérivées pour ces problèmes dans les cas suivants :

1. En utilisant la formule de différence progressive.
2. En utilisant la formule de différence regressive.
3. En utilisant la formule de différence centrale.

Exercice V : Approcher $y'(1.0)$ si

$$\begin{aligned} x &= [0.8 \quad 0.9 \quad 1.0 \quad 1.1 \quad 1.2] \\ y &= [0.992 \quad 0.999 \quad 1.000 \quad 1.001 \quad 1.008] \end{aligned}$$

Exercice VI : Approcher $y'(4)$ si

$$\begin{aligned} x &= [0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16] \\ y &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \end{aligned}$$

Exercice VII : Calculer $y''(2)$, et $y'''(2)$ si

$$\begin{aligned} x &= [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \\ y &= [0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16] \end{aligned}$$

Exercice VIII : Caculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ en utilisant la formule du trapèze et la formule de Simpson. Comparer avec le résultat exact.

Exercice IX : Approcher l' integrale suivante :

$$P1 : \quad \int_0^1 x \sin(\pi x) dx$$

1. En utilisant la formule de trapèze composée avec 2 intervalles.
2. En utilisant la formule de trapèze composée avec 4 intervalles.
3. En utilisant la formule de Simpson avec 2 intervalles.
4. En utilisant la formule de Simpson composée avec 4 intervalles.

Exercice X : En utilisant les formules d'estimation d'erreur, trouver les bornes d'erreur pour le problème $P1$ dans les cas 1 *à* 4, puis calculer la valeur exacte de l'integrale et comparer les erreurs exactes "$E(f)$" et les bornes d'erreurs trouvées.