Probabilité

Chapitre 1: Notion de probabilité

Faculté des Siences de Rabat

Département de Mathématiques

2016-17

Exemple1

L'étude d'un phénomène aléatoire commence par la description de l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Example

Expérience 1: On jette un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le numéro apparu sur la face supérieure.
On obtient un nombre $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
$\omega \in \Omega$ est appelé une réalisation ou une "epreuve".
$A \subset \Omega$ est appelé un événement.
$A =$ " le nombre obtenu est pair " , A est réalisé $\iff$ $\omega \in \{2, 4, 6\}$

Exemple2

Example

Expérience 2: Soit un jeu de dominos (chacun des dominos porte deux nombres de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ éventuellement identiques).
On tire au hasard un domino. On obtient une paire $\{x, y\} \in \Omega = \{\{x,\ y\} : x,\ y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$; $\{x, y\}$ est une réalisation ou une "epreuve".
$A \subset \Omega$ est appelé un événement.

Exemple2(suite)

Example

$A =$ l'événement " la somme des deux nombres obtenus est supérieure ou égale à 8 "

$$\begin{aligned} A &= \{\{x,y\}/x+y \geq 8\} \\ &= \{\{2,6\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,6\}\} \\ & A \text{ est réalisé } \Longleftrightarrow \{x,y\} \in A \end{aligned}$$

Ω est l'événement qui est toujours réalisé " événement certain" ou " espace de l'univers".
$\emptyset$ est l'événement qui n'est jamais réalisé " événement impossible".

Expérience aléatoire et ensemble des résultats

- Une expérience aléatoire $\mathcal{C}$ est une expérience dont le résultat est soumis au hasard, c'est aussi une expérience dont on ne peut prévoir complétement le résultat.

Expérience aléatoire et ensemble des résultats

- Une expérience aléatoire $\mathcal{C}$ est une expérience dont le résultat est soumis au hasard, c'est aussi une expérience dont on ne peut prévoir complétement le résultat.
- Le résultat de la dite expérience, qui a priori n'est pas connu, est représentée par l'ensemble Ω de toutes les réalisations possibles. Ω est appelé l'ensemble des résultats (ou référentiel).

Expérience aléatoire et ensemble des résultats

- Une expérience aléatoire $\mathcal{C}$ est une expérience dont le résultat est soumis au hasard, c'est aussi une expérience dont on ne peut prévoir complétement le résultat.
- Le résultat de la dite expérience, qui a priori n'est pas connu, est représentée par l'ensemble Ω de toutes les réalisations possibles. Ω est appelé l'ensemble des résultats (ou référentiel).
- Une réalisation $\omega \in \Omega$ est aussi appelée épreuve aléatoire.

Expérience aléatoire et ensemble des résultats

N^o	Expérience	Ensemble de résultats possibles
1	Jeter un dé et relever le nombre qui est sur sa face supérieure	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2	Jeter une pièce de monnaie	$\Omega = \{pile, face\} = \{P, F\}$
3	Compter le nombre de personnes entrant dans un magasin entre 9 h et 10 h	$\Omega = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$
4	Jeter un dé deux fois de suite	$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 1), ..., (6, 5), (6, 6)\}$
5	Jeter une pièce de monnaie trois de fois de suite	$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$
6	Observer la durée de vie d'une ampoule électrique	$\Omega = \mathbb{R}^+$

Les sous-ensembles de Ω sont appelés événements. On distingue les événements simples des événements composés

Example

Dans l'expérience N^{o}4:
$A = \{(1,2)\}$ est un événement simple.
$B = \{(1,2),(1,4),(5,3)\}$ est un événement composé.
$C = \{$la somme des points obtenus est égale à 4$\}$
Il est clair que $C = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ qui est donc un événement composé.

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$
- Evénement certain : $A = \Omega$

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$
- Evénement certain : $A = \Omega$
- Evénement contraire : $\overline{A} = \Omega \backslash A$

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$

- Evénement certain : $A = \Omega$

- Evénement contraire : $\overline{A} = \Omega \backslash A$

- Evénements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$
- Evénement certain : $A = \Omega$
- Evénement contraire : $\overline{A} = \Omega \backslash A$
- Evénements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$
- Réalisation simultanée de deux événements : $A \cap B$

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$
- Evénement certain : $A = \Omega$
- Evénement contraire : $\overline{A} = \Omega \backslash A$
- Evénements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$
- Réalisation simultanée de deux événements : $A \cap B$
- Réalisation d'un événement au moins : $A \cup B$

Opérations sur les événements

- Evénement impossible : $A = \emptyset$
- Evénement certain : $A = \Omega$
- Evénement contraire : $\overline{A} = \Omega \backslash A$
- Evénements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$
- Réalisation simultanée de deux événements : $A \cap B$
- Réalisation d'un événement au moins : $A \cup B$
- Evénement $A \backslash B = A \cap \overline{B} = A \backslash (A \cap B)$. Cet événement est caractérisé par la réalisation de A et la non réalisation de B.

Langage probabiliste des événements

Soient A et B deux événements d'un ensemble Ω.

- A chaque événement A correspond son événement contraire. "Non A" est réalisé si et seulement A ne l'est pas.

$$\omega \in \text{"non } A\text{"} \iff \omega \notin A \iff \omega \in \overline{A}$$

Soient A et B deux événements d'un ensemble Ω.

- A chaque événement A correspond son événement contraire. "Non A" est réalisé si et seulement A ne l'est pas.

$$\omega \in \text{"non } A\text{"} \Longleftrightarrow \omega \notin A \Longleftrightarrow \omega \in \overline{A}$$

- L'événement "A et B" est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience.

$$\omega \in \text{"}A \text{ et } B\text{"} \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \in B \Longleftrightarrow \omega \in A \cap B$$

Langage probabiliste des événements

Soient A et B deux événements d'un ensemble Ω.

- A chaque événement A correspond son événement contraire. "Non A" est réalisé si et seulement A ne l'est pas.

$$\omega \in \text{"non } A\text{"} \Longleftrightarrow \omega \notin A \Longleftrightarrow \omega \in \overline{A}$$

- L'événement "A et B" est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience.

$$\omega \in \text{"}A \text{ et } B\text{"} \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ et } \omega \in B \Longleftrightarrow \omega \in A \cap B$$

- A et B sont incompatibles ou disjoints si et seulement si A et B ne peuvent être réalisés simultanément ce qui est équivalent à $A \cap B = \emptyset$.

Langage probabiliste des événements

- L'événement "A ou B" est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé.

$$\omega \in \text{"}A \text{ ou } B\text{"} \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \iff \omega \in A \cup B$$

Langage probabiliste des événements

- L'événement "A ou B" est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé.

$$\omega \in "A \text{ ou } B" \Longleftrightarrow \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \Longleftrightarrow \omega \in A \cup B$$

- $$A \backslash B = A \cap \overline{B} = A \backslash (A \cap B) \ , \ A \cup B = A \cup (B \backslash A) \ , \ A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

Langage probabiliste des événements

- L'événement "A ou B" est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé.

$$\omega \in "A \text{ ou } B" \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \iff \omega \in A \cup B$$

-

$$A \backslash B = A \cap \overline{B} = A \backslash (A \cap B) \ , \ \ A \cup B = A \cup (B \backslash A) \ , \ \ A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

- On dit que "A implique B" si la réalisation de A entraîne la réalisation de B. On a:

$$\omega \in A \Longrightarrow A \text{ est réalisé } \Longrightarrow B \text{ est réalisé } \Longrightarrow \omega \in B \text{ donc } A \subset B$$

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Définition d'une probabilité

Definition

Une probabilité P sur l'ensemble Ω est une application:

$$P : A \subset \Omega \longrightarrow [0,\, 1]$$

qui satisfait les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} i) & 0 \leq P(A) \leq 1 \\ ii) & P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset. \\ iii) & P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) \text{ si } A_i \cap A_j = \emptyset\,,\ \forall\, i \neq j. \\ iv) & P(\Omega) = 1. \end{cases}$$

On dit alors que Ω est muni d'une probabilité P.

Example

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\ P(\{i\}) = \frac{1}{6}\ \forall i \in \Omega$

$P(\bigcup_{i=1}^{6} \{i\}) = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1$

$A = \{2,4,6\}$

$P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Longrightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \end{cases}$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Longrightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
- $A \not\subset B \Longrightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Longrightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
- $A \not\subset B \Longrightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $A_i \cap Aj = \emptyset \ \forall i \neq j \ P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A) \leq P(B) \\ P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \end{array} \right.$
- $A \not\subset B \Longrightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $A_i \cap Aj = \emptyset \ \forall i \neq j \ P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriété d'une probabilité

On peut établir les propriétés suivantes:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Longrightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
- $A \not\subseteq B \Longrightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
- $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $A_i \cap Aj = \emptyset \ \forall i \neq j \ P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$

Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Un ensemble Ω est dit dénombrable si il existe une bijection de Ω vers $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$. Les ensembles dénombrables sont soit finis, soit infinis.

Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

- Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.

Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

- Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.
- Toute probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée d'un ensemble

Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

- Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.
- Toute probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée d'un ensemble
- $\{P(\omega\}); \omega \in \Omega\}$ vérifiant: $\forall\ \omega \in \Omega;\ P(\{\omega\}) \geqslant 0$

Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

- Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.
- Toute probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée d'un ensemble
- $\{P(\omega\}); \omega \in \Omega\}$ vérifiant: $\forall\ \omega \in \Omega;\ P(\{\omega\}) \geqslant 0$
- $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$

Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

- Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.
- Toute probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée d'un ensemble
- $\{P(\omega\}); \omega \in \Omega\}$ vérifiant: $\forall\ \omega \in \Omega;\ P(\{\omega\}) \geqslant 0$
- $\sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$
- on a alors $\forall\ A \subset \Omega;\ P(A) = \sum\limits_{\omega\in A} P(\{\omega\})$

Example

d'un jeu de 32 cartes neuf et battu, on extrait une carte. Pour des raisons de symétrie, chaque carte joue le même rôle, donc "a la même chance" d'être tirée. Par exemple la probabilité de l'événement A : "tirer le roi de cœur" est

$$P(A) = \frac{1}{32}$$

La probabilité de l'événement B : "tirer un as" est

$$P(B) = \frac{\text{Nombre d'As}}{\text{Nombre de cartes}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Equiprobabilité

Definition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque Ω est fini, de cardinal n, et tous les événements simples sont de même probabilité (équiprobables). Dans ce cas:

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \, \forall \, \omega_i \in \Omega$$

Si les événements simples sont équiprobables, la probabilité de tout événement A est donnée par:

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorable à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Equiprobabilité

Example

On jette un dé deux fois de suite. L'ensemble des résultats de l'expérience aléatoire Ω est:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),...,(6,5),(6,6)\}$$

On a $Card(\Omega) = 36$. On muni Ω de la probabilité uniforme,
$P(\{(i,j)\}) = \dfrac{1}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{36}, \quad \forall (i,j) \in \Omega$
Soit A l'événement : " le total des points est inférieur à 4". d'où:

$$A = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \Longrightarrow Card(A) = 3 \text{ et } P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Le but de l'analyse combinatoire est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble de cardinal fini. Il permet aussi de compter le nombre de résultats possible d'une experience.
Soient E et F deux ensembles finis.

Definition

Le produit cartésien des ensembles E et F est l'ensemble des couples (a, b) , où a appartient à E et b appartient à F. On le note $E \times F$

Example

Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$, on a :

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Généralités

On généralise cette notion à n ensembles E_1, E_2, ..., E_n en faisant intervenir des n-uplets.

Example

Soient $E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{1, 2\}$, $E_3 = \{x, y\}$ et $E_4 = \{3, 4\}$ on a :

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 = & \{(a, 1, x, 3), (a, 1, x, 4), (a, 1, y, 3), (a, 1, y, 4) \\ & , (a, 2, x, 3), (a, 2, x, 4), (a, 2, y, 3), (a, 2, y, 4) \\ & , (b, 1, x, 3), (b, 1, x, 4), (b, 1, y, 3), (b, 1, y, 4) \\ & , (b, 2, x, 3), (b, 2, x, 4), (b, 2, y, 3), (b, 2, y, 4) \\ & , (c, 1, x, 3), (c, 1, x, 4), (c, 1, y, 3), (c, 1, y, 4) \\ & , (c, 2, x, 3), (c, 2, x, 4), (c, 2, y, 3), (c, 2, y, 4)\} \end{aligned}$$

$(c, 1, x, 4)$ est un 4-uplet.

Definition

Si un ensemble E est fini et contient n éléments, alors le nombre n est appelé le cardinal de E. On note $Card(E) = n$, en convenant que $Card(\emptyset) = 0$.

Règle 1: Soient E_1, E_2, ..., E_n des ensembles finis deux à deux disjoints c'est à dire

$E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$. On note $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Alors on a

$$Card(E) = Card(E_1) + Card(E_2) + ... + Card(E_n)$$

cardinal d'un ensemble

On a les résultats suivants: Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.

- Si A et B sont disjointes c'est à dire $A \cap B = \emptyset$,
  $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

On a les résultas suivants: Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.

- Si A et B sont disjointes c'est à dire $A \cap B = \emptyset$,
  $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

- Dans tous les cas,
  $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

cardinal d'un ensemble

On a les résultats suivants: Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.

- Si A et B sont disjointes c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
- Dans tous les cas, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
- $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

Arbre de dénombrement

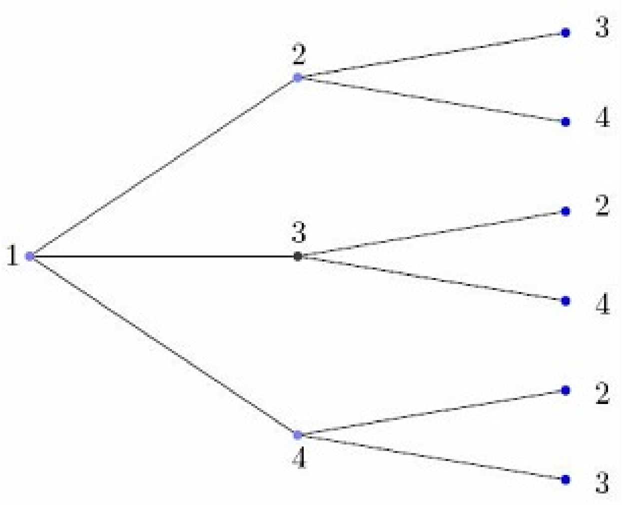
Lorsqu'une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1 , n_2 , . . . , n_p possibilités (où chaque n_k ne dépend que de l'étape k), le nombre total d'issues est $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$.Une telle situation peut être représentée par un arbre.

Example

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Dénombrer tous les nombres formés de 3 chiffres distincts de E et commençant par 1. Une solution est représentée par un triplet ordonné de 3 chiffres choisis parmi les chiffres 1, 2, 3 et 4 sachant que le 1^{er} chiffre doit être le «1» et que tous les chiffres sont distincts. Ainsi le triplet $(1, 3, 2)$ signifie qu'on a choisi en 1^{er} le «1», en second le «3» puis enfin le «2». Ce triplet correspond au nombre 132.

Pour trouver les 6 triplets possibles: 123, 124, 132, 134, 142, 143, on construit un arbre :

Arbre de dénombrement



Règle 2: Soient E_1, E_2, ..., E_n des ensembles finis. On note $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Alors on a:

$$Card(E) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times ... \times Card(E_n)$$

Permutation

On se place sur un ensemble Ω fini. On note n son cardinal. On va s'intéresser à l'étude des différentes manières d'ordonner des objets qui seront appelés des échantillons.

Definition

On appelle permutation un rangement ordonné de n objets distinguables. c'est également une bijection d'un ensemble de n vers lui mème.

Permutation sans répétition

Definition

Le nombre de permutations de n objets ($n \geq 1$) distincts est le nombre noté $n!$ (qui se lit factoriel n) définie par

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

C'est aussi le nombre de bijections d'un ensemble de n éléments vers un ensemble de n éléments.

Example

Les six permutations de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ sont :

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

Permutation sans répétition

Example

Les permutations possibles des lettres A, B et C sont: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. soit

$$6 = 3 \times 2 \times 1$$

Permutation avec répétition

Definition

Le nombre de permutations de n objets comprenant n_1, n_2, ..., n_r objets identiques ou indiscernables est égal à

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_r!} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{r} n_k = n$$

Example

Les permutations possibles des lettres A, B, B, B et C sont: ABBBC, ABBCB, ABCBB, ACBBB, CABBB, BABBC, BABCB, BACBB, BCABB,CBABB, BBABC, BBACB, BBCAB, BCBAB, CBBAB, BBBAC, BBBCA, BBCBA, BCBBA, CBBBA.

$$\frac{5!}{1! \times 3! \times 1!} = \frac{120}{6} = 20$$

Echantillons ordonnés avec répétitions

On se place sur un ensemble Ω fini de cardinal n

Definition

Un échantillons ordonnés avec répétitions de longueur p est une suite ordonnés de p d'éléments de Ω $(p \leq n)$ (non nécessairement distincts), $(e_1, e_2, ...e_p)$, C'est un éléments du produit cartésien de $\Omega^p = \Omega \times \Omega \times ... \times \Omega$ (p termes) que l'on appelle couple lorsque $p = 2$ et triplet lorsque $p = 3$.Le nombre d'échantillons ordonnés avec répétitions de longueur p de Ω est:

$$n^p = Card(\Omega)^p$$

C'est aussi le nombre d'applcations d'un ensemble de p éléments vers un ensemble de n éléments.

Echantillons ordonnés avec répétitions

Example

Combien de sigles de trois lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet?
Il y a répétition car AAA est un sigle.
Il y a ordre car ABC $\neq$ BAC.
La taille de Ω est égale à $Card\,\Omega$ =26 et $p = 3$. Donc il y a $26^3 = 17576$.

Echantillons ordonnés sans répétitions Arrangement

On se place sur un ensemble Ω fini de cardinal n

Definition

Un échantillons ordonnés sans répétitions de longueur p est une suite ordonnés de p d'éléments de Ω est un p-uplet de Ω, $(e_1, e_2, ...e_p)$, dont tous les éléments sont diffférents. Il faut donc $p \leq n$. Le nombre d'échantillons ordonnés sans répétitions ou d'arrangements de p éléments parmi n d'un ensemble E à n éléments est le nombre

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)...(n-p+2)(n-p+1)$$

C'est aussi le nombre d'injections d'un ensemble de p éléments vers un ensemble de n éléments.

Example

Si l'on numérote les 8 coureurs de 1 à 8, le podiums (c'est à dire les 3 premiers arrivés) correspond à un tirage ordonné de 3 boules distinctes dans une urne contenant des boules numérotés de 1 à 8 et évidemment sans remise de la boule tirée. Le nombre de podium ou le nombre de tirages possibles vaut donc

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Echantillons non ordonnés sans répétitions ou Combinaison

Definition

Un échantillons non ordonnés sans répétitions de taille p sur Ω est un un sous ensemble de p éléments de Ω $(p \leq n)$, $\{e_1, e_2, ...e_n\}$. Le nombre de sous ensemble de p d'éléments de Ω ou combinaison de p éléments de Ω est

$$C_n^p = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Example

Combien de couleurs peut-on obtenir en mélangeant deux couleurs non identiques des trois couleurs: Rouge, Bleu, Jaune?
On considère des échantillons non ordonnés : Rouge + Bleu = Bleu + rouge.
Il n'y a pas répétition: Jaune + Jaune ne convient pas.
La réponse est donc: $C_3^2 = 3$.

Example

Les boules sont numérotées de 1 à 49. On tire 6 boules. Un tirage des 6 numéros parmi les 49, est une combinaison de 6 parmi 49. Le nombre de tirages possibles vaut donc

$$C_{49}^{6} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816$$

On a $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

Application: La formule du binôme: $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^p \, b^{n-p}$.

Echantillons non ordonnés avec répétitions

Si nous tirons avec remise p objets parmi n objets discernables, et nous les disposons sans tenir compte de l'ordre d'apparition; ces objets peuvent apparaître plusieurs fois et nous ne pouvons les représenter ni avec une partie à p éléments, ni avec un p-uplet puisque leur ordre de placement n'intervient pas.

Definition

Un échantillon non ordonné avec répétitions de taille p sur Ω ou le nombre de combinaisons avec répétitions de taille p sur Ω est une liste de p éléments de Ω non ordonné et non nécessairement distincts.

Le nombre d'échantillon non ordonné avec répétitions de taille p sur Ω est:

$$C_{n+p-1}^{p}$$

Exemple

Example

Après développement et réduction combient de termes comportera $(a+b+c)^3$?
$(a+b+c)^3 =$
$a^3+3a^2b+3a^2c+6abc+3ab^2+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$.
Il y a $C_{3+3-1}^3 = C_5^3 = 10$ termes.

Exemple

Example

On dispose d'un grand nombre de paquets de beurre, paire d'œufs, sucre et farine pesant tous exactement $100g$. Combien peut-on faire de gâteaux d'un kilo différents avec ces ingrédients? On admettra comme "gâteau" des solutions triviales comme: Omelette pure, Beurre pur, farine pure, etc ... Un exemple de solution non triviale est donné par:
$(Be, Be, Be, Oe, Oe, Oe, Su, Su, Fa, Fa)$
Il est claire que l'ordre des ingrédients n'intervient pas. On a $n = 4$ et $p = 10$. Il y a $C_{10+4-1}^{10} = \mathrm{C}_{13}^{10} = 286$ recettes.

Soit une famille composée de 4 enfants.
$\Omega = \{(g,g,g,g),(g,g,g,f),(g,g,f,g),(g,f,g,g),(f,g,g,g),$
$(g,g,f,f),(g,f,g,f),(g,f,f,g),(f,g,g,f),(f,g,f,g),(f,f,g,g),$
$(g,f,f,f),(f,g,f,f),(f,f,g,f),(f,f,f,g),(f,f,f,f)\}$. $Card(\Omega) = 16$.
soient les événements A " la famille a au moins 3 garçons ", on a

$$P(A) = \frac{5}{16}$$

B " la famille a au moins une fille ", on a $P(B) = \dfrac{15}{16}$
Supposons que l'on sache que l'événement B est réalisé, que devienne la probabilité de A?

L'ensemble des réalisations s'est modifié est vaut:
$\Omega'=\{(g,g,g,f),(g,g,f,g),(g,f,g,g),(f,g,g,g),(g,g,f,f),$
$(g,f,g,f),(g,f,f,g),(f,g,g,f),(f,g,f,g),(f,f,g,g),(g,f,f,f),$
$(f,g,f,f),(f,f,g,f),(f,f,f,g),(f,f,f,f)\}.$
$Card(\Omega') = 15$
L'événement A devient maintenant
$A'=\{(g,g,g,f),(g,g,f,g),(g,f,g,g),(f,g,g,g)\}.$
est la probabilité est modifiée: on la note P'. On a

$$P'(A') = \frac{Card(A')}{Card(\Omega')} = \frac{4}{15}$$

Cette nouvelle probabilité est notée

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ réalisé et } B \text{ réalisé})}{P(B)} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{15}{16}}$$

Probabilité Conditionnelles

Soient A et B deux événements d'un même référentiel Ω tel que $P(A) > 0$.

Definition

On appelle " probabilité conditionnelle de B relativement à A " ou bien " probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé ", l'expression suivante:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Probabilité Conditionnelles

Example

On jette un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un total inférieur à 5 sachant que l'on a obtenu 2 au premier jet ?

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),...,(6,5),(6,6)\}$$

$Card(\Omega) = 6^2 = 6 \times 6 = 36$
A : événement " obtenir 2 au premier jet"
$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\},\ Card(A) = 6$ et

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Probabilité Conditionnelles(suite)

Example

B : événement " la somme des deux nombres obtenus est inférieure à 5 "
$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$
$B \cap A = \{(2,1),(2,2)\}$, $Card(A \cap B) = 2$ et

$$P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

La probabilité cherchée est:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$$

Arbre de probabilité

Definition

Un arbre de probabilité est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.

Example

On lance un dé, si le numéro obtenu est un multiple de 3, on extrait au hasard une boule dans l'urne U_1 qui contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 3 boules rouges. Si le numéro obtenu n'est pas un multiple de 3, on extrait une boule dans l'urne U_2 qui contient 3 boules noires et 2 boules blanches. Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

Arbre de probabilité(exemple)

Example

La première étape permet de définir une équiprobabilité sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère les deux évènements complémentaires:
$A =$ « le lancer donne un multiple de 3 »
$B =$ « le lancer ne donne pas un multiple de 3 »
On a donc $A = \{3, 6\}$ et $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{3}$ puis
$P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{2}{3}$.

La seconde étape permet d'étudier ce qui se passe quand on tire dans l'urne U_1 ou l'urne U_2.

Arbre de probabilité(exemple)

Example

Le tirage dans l'urne U_1 permet de définir une équiprobabilité sur Ω_1
$\Omega_1 = \{N, N, N, B, B, B, B, R, R, R\}$.On considère les deux évènements complémentaires:
$U1_N =$ « le tirage donne une boule noire »
$U1_{BR} =$ « le tirage ne donne pas une boule noire »
On a donc $U1_N = \{N, N, N\}$ et $P(U1_N) = \dfrac{Card(U1_N)}{Card(\Omega_1)} = \dfrac{3}{10}$ puis $P(B_{BR}) = 1 - P(B_N) = \dfrac{7}{10}$.

Example

Le tirage dans l'urne U_2 permet de définir une équiprobabilité sur Ω_2 $\Omega_2 = \{N, N, N, B, B\}$. On considère les deux évènements complémentaires:

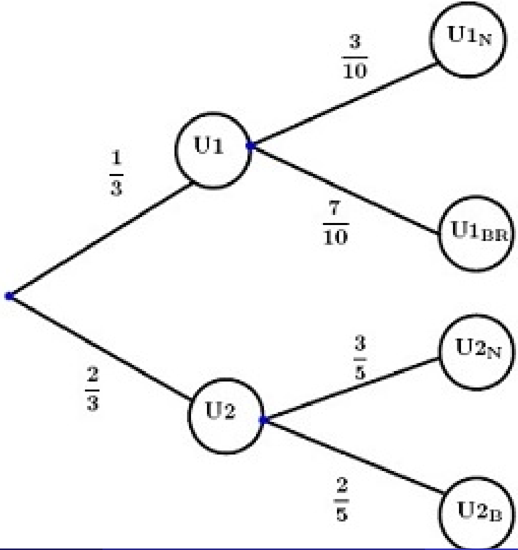
$U2_N$ = « le tirage donne une boule noire »

$U2_B$ = « le tirage ne donne pas une boule noire »

On a donc $U2_N = \{N, N, N\}$ et $P(U2_N) = \dfrac{Card(U2_N)}{Card(\Omega_2)} = \dfrac{3}{5}$ puis $P(U2_B) = 1 - P(U2_N) = \dfrac{2}{5}$.

L'expérience se résume alors dans l'arbre suivant :

Arbre de probabilité(exemple)



Arbre de probabilité(exemple)

Example

La lecture des probabilités se fait alors aisément:
Probabilité de tirer dans l'urne 1 et d'obtenir une boule noire est:

$$P(A \cap U1_N) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

Probabilité de tirer dans l'urne 2 et d'obtenir une boule noire est:

$$P(B \cap U2_N) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

La probabilité de tirer une boule noire est alors:

$$P(A) = P(A \cap U1_N) + P(B \cap U2_N) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

Probabilité Conditionnelles

Example

Une urne contient 10 boules noires et 15 boules blanches. On effectue deux tirages successifs sans remettre la première boule tirée dans l'urne (tirage sans remise). Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage ?
$Card(\Omega) = 25$
A : événement " Obtenir une boule noire au premier tirage "

$$Card(A) = 10 \text{ et } P(A) = \frac{10}{25}$$

Probabilité Conditionnelles

Example

B : événement " Obtenir une boule blanche au deuxième tirage "

$$Card(B) = 15 \text{ et } P(B/A) = \frac{15}{24}$$

C : événement " Obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage " $C = A \cap B \Longrightarrow P(C) = P(A \cap B)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B/A) \times P(A)$$

d'où

$$P(A \cap B) = \frac{15}{24} \times \frac{10}{25} = \frac{1}{4}$$

Théorème des probabilités totales

Definition

On dit que $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ est un système complet d'événements de Ω si:

$i) \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

$ii) E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall\ i \neq j \quad ; i, j = 1, 2, ..., n$

Theorem

Soit $\{E_i\}_{i=1...n}$ *un système complet d'événements de* Ω *de probabilités non nulles c'est à dire* $P(E_i) > 0$, $\forall\ i = 1, ..., n$. *Alors pour tout événement* B, *on a:*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + ... + P(B \cap E_n) \\ &= P(B/E_1)P(E_1) + P(B/E_2)P(E_2) + ... + P(B/E_n)P(E_n) \end{aligned}$$

Example

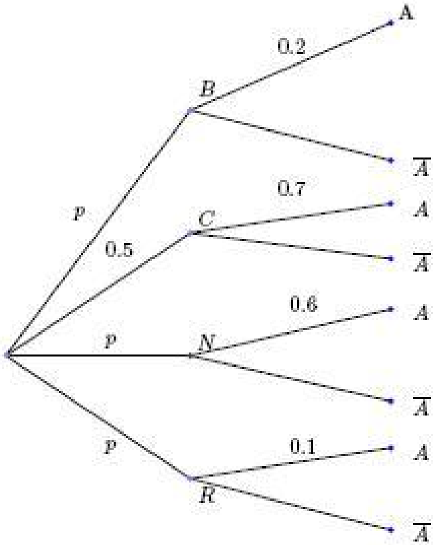
Dans une population le nombre de châtains est de 50% et le nombre de blonds, de noirs ou d'autres couleurs est égal. La génétique nous apprend que les probabilités conditionnelles pour qu'un enfant soit châtain (événement A) sachant que son pére est blond (événement B) est $P(A/B) = 0.2$, et que de même avec des notations évidentes $P(A/C) = 0.7$, $P(A/N) = 0.6$ et $P(A/R) = 0.1$. Calculons $P(A)$.
Les événements B, C, N, R forment un système complet d'événements avec

$$P(B) = P(N) = P(R) = \frac{1}{6} \text{ et } P(C) = \frac{1}{2}$$

Le théorème des probabilités totales nous donnent

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B)P(B) + P(A/C)P(C) + P(A/N)P(N) + P(A/R)P(R) \\ &= 0.2 \times \frac{1}{6} + 0.7 \times \frac{1}{2} + 0.6 \times \frac{1}{6} + 0.1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Théorème des probabilités totales



Formule de Bayes

Soit $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ un système complet d'événements de Ω.
A désignant un événement de Ω tel que $P(A) > 0$. La formule de Bayes s'écrit:

$$P(E_k/A) = \frac{P(A/E_k) \times P(E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/E_i) \times P(E_i)}$$

Formule de Bayes

Example

soient deux cages remplies de lapins. La première contient dix (10) lapins gris et trente (30) blancs ; la seconde en a vingt (20) de chaque. On tire sans préférence particulière une des deux cages au hasard et dans cette cage, on tire un lapin au hasard. Le lapin est blanc. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré ce lapin dans la première cage sachant qu'il est blanc?

on veut calculer la probabilité de C_1 sachant B.

Example

Intuitivement, on comprend bien qu'il est plus probable que ce lapin provienne de la première cage, que de la seconde. Donc, cette probabilité devrait être supérieure à 50. La réponse exacte vient du théorème de Bayes . Soit C_1 l'hypothèse " On tire dans la première cage. " et C_2 l'hypothèse " On tire dans la seconde cage. ". Comme on tire sans préférence particulière, $P(C_1) = P(C_2)$; de plus, comme on a certainement tiré dans une des deux cages, la somme des deux probabilités vaut 1 : chacune vaut donc $\frac{1}{2}$.

Example

Notons B l'information donnée " On tire un lapin blanc " Comme on tire un lapin au hasard dans une des cages,

- la probabilité de B sachant C_1 vaut :

$P(B/C_1) = \dfrac{P(B \cap C_1)}{P(C_1)} = \dfrac{30}{40} = 0.75.$

- la probabilité de B sachant C_2 vaut :

$P(B/C_2) = \dfrac{P(B \cap C_2)}{P(C_2)} = \dfrac{20}{40} = 0.5.$

La formule de Bayes nous donne donc,

$$\begin{aligned} P(C_1/B) &= \frac{P(B/C_1) \times P(C_1)}{P(B/C_1) \times P(C_1) + P(B/C_2) \times P(C_2)} \\ &= \frac{0.75 \times 0.5}{0.75 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} = \frac{0.375}{0.625} = 0.6 \end{aligned}$$

Evénements indépendants

Definition

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A/B) = A$ et $P(B/A) = B$ c'est à dire:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque: si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Example

On lance deux fois un dé cubique.
$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \times \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ et $Card(\Omega) = 36$.

Evénements indépendants

Example

• A_1: "Le premier nombre obtenu est pair"
$= \{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
• A_2: "Le deuxième nombre obtenu est impair"
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}$
• A_3: "La somme des deux nombres obtenus est paire"
$$= \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$$
$Card(A_1) = 18$ $Card(A_2) = 18$ $Card(A_3) = 18$.
$A_1 \cap A_2 = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$ et $Card(A_1 \cap A_2 =) = 9$
$A_1 \cap A_3 = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$ et $Card(A_1 \cap A_2 =) = 9$
$A_2 \cap A_3 = \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$ et $Card(A_1 \cap A_2 =) = 9$

Example

$$P(A_1) = \frac{Card(A_1)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2} \;\;,\;\; P(A_2) = \frac{Card(A_2)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et} \quad P(A_3) = \frac{Card(A_3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{Card(A_1 \cap A_2)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{4} \;\;,\;\; P(A_1 \cap A_3) = \frac{Card(A_1 \cap A_3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{et} \quad P(A_2 \cap A_3) = \frac{Card(A_2 \cap A_3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

Example

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont indépendants}$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_1 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants}$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants}$$