

chap 1

Application linéaire et matrices

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Application linéaire

Déf

Soit E et F deux K -e.v. et soit f une application de E dans F .
on dit que f est une application linéaire de E dans F si elle vérifie les deux conditions :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \text{ on a : } f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad \forall \alpha \in K \quad f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

les deux conditions sont équivalentes

$$\forall \alpha \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad f(\alpha \vec{u} + \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

- si $E = F$ alors f est dit endomorphisme de E .
 - si $F = K$ alors f est appelée forme linéaire sur E .
 - si $f: E \rightarrow F$ est bijectif alors f est appelée isomorphisme de E sur F .
un isomorphisme de E sur E est appelé automorphisme.
- Soit f une application $E \rightarrow F$ les propriétés suivantes sont immédiates :

- $f(0_E) = 0_F$ et $\forall \vec{u} \in E, f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$
- si f est un isomorphisme alors l'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E appelé isomorphisme réciproque.

Image et noyau d'une application linéaire

Théorème

Soit E et F deux K -e.v. et soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire alors :

- l'image par f de tout s.e.v. de E est un s.e.v. de F
- l'image réciproque par f de tout s.e.v. de F est un s.e.v. de E .

$$E, F \text{ s.e.v.} \quad f: E \rightarrow F$$

f est une application linéaire

$$\begin{cases} \forall A \text{ s.e.v. de } E, \text{ on a } f(A) \text{ est s.e.v. de } F \\ \forall B \text{ s.e.v. de } F \text{ on a } f^{-1}(B) \text{ est un s.e.v. de } E. \end{cases}$$

$$f(A) = \{ y \in F, \exists x \in A / f(x) = y \}$$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E, f(x) \in B \}$$

Déf

- Soient E et F deux K -e.v. et $f: E \rightarrow F$ une application linéaire
- le s.e.v. $f(E)$ est appelée l'image de F et noté $\text{Im } f$
 - le s.e.v. $f^{-1}(0_F) = \{ x \in E / f(x) = 0_F \}$ est appelé noyau de f noté $\text{Ker } f$

une application linéaire $f: E \rightarrow F$ est surjective si :

$$\text{Im } f = F$$

Proposition

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire alors f est injective si

$$\text{Ker } f = \{ 0_E \}$$

$$f \text{ est injectif} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \{ 0_E \}$$

Proposition:

soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire et soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une famille génératrice de E .

alors $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$ en particulier :

si f est surjective alors $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de F .

Proposition:

soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire injective et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille ~~génératrice~~ libre de E alors $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une famille libre de F .

Proposition:

soit $f: E \rightarrow F$ un isomorphisme (bijectif) et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E alors la famille formée $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une Base de F .

soit E, F deux K -ev l'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_K(E, F)$ ou noté $\mathcal{L}(E, F)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, F)$

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in K, \forall \vec{x} \in E$$

$$\text{on pose } (f + \lambda g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$$

ceci définit sur $\mathcal{L}(E, F)$ une structure de K -ev d'une autre côté si G est un autre K -ev on a :

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F, G) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$$

$$\text{on a } \forall f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E, F), \forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G) \text{ et } \forall \lambda \in K$$

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

$$\lambda(g \circ f) = g \circ (\lambda f) = g \circ (\lambda f)$$

Théorème:

soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = n$ (finie)

soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors on a les cas suivants.

- 1) f injective $\Leftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est une famille libre de F .
- 2) f est surjective $\Leftrightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de F .
- 3) f est bijective $\Leftrightarrow \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F .

Théorème:

soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \infty$
alors: $\text{Im} f$ est un ev de F de dim finie et on a :

$$\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim(E)$$

Theoreme 2

soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = n < +\infty$
alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est isomorphisme de E sur F .
- f est injective
- f est surjective

Définition :

soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ la dimension $\text{Im} f$ est appelée rang de f
est notée $\text{rg} f$.

Exemple :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y + z; y + z)$$

$$\text{Im} f \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Im} f = \mathbb{R}^2 \quad \text{car } \dim \text{Im} f = 2$$

Matrice d'une application linéaire :

soit E et F deux K -ev non nuls de dimension respectivement notée n et p
soit B une base de E .

$$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$B' = (f_1, \dots, f_p) \text{ une base de } F.$$

et $\varphi: E \rightarrow F$ une application linéaire

Pour tout $x = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ dans E on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j\right) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$$

ainsi φ est entièrement déterminée par les images des vecteurs de la base posons $1 \leq j \leq n$ $\varphi(e_j)$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i$$

on appelle la matrice de φ dans les bases B et B' la (p, n) matrice notée $M(\varphi, B, B')$

$$M(\varphi, B, B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & & & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix}$$

$\varphi(e_1) \quad \dots \quad \varphi(e_n)$

Exemple 2

$$\mathcal{P}_n[\mathbb{K}] = \{ P \in \mathbb{K}[x] \mid P = 0 \text{ ou } \deg P \leq n \}$$

$$\textcircled{1} \quad \varphi: \mathcal{P}_2[x] \rightarrow \mathcal{P}_2[x]$$

$$P \mapsto \varphi(P) = P'$$

$$B = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{et} \quad B' = \{1, x, x^2\}$$

$$M(\varphi, B, B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{matrix}$$

$$\varphi(1) \quad \varphi(x) \quad \varphi(x^2) \quad \varphi(x^3)$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_2: \mathcal{P}_3[x] \rightarrow \mathcal{P}_3[x]$$

$$P \mapsto xP'$$

$$B = \{1, x, x^2, x^3\} \quad B' = \{x, x^2, x^3\}$$

$$\varphi_2(1) = 0 \quad \varphi_2(x) = x$$

$$\varphi_2(x^2) = 2x^2 \quad \varphi_2(x^3) = 3x^3$$

$$M(\varphi_2, B, B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{matrix}$$

Proposition:

$$\dim E = n$$

$$\dim F = p$$

soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soient B et B' respectivement une base de E et une base de F .

$$\text{alors l'application } \varphi \in \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{p,n}(\mathbb{K})$$

$$\varphi \mapsto M(\varphi, B, B')$$

est un isomorphisme

soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$ on a:

$$i) \quad M_1 = M(\varphi_1, B, B') \quad \text{et} \quad M_2 = M(\varphi_2, B, B')$$

$$M_1 + M_2 = M(\varphi_1 + \varphi_2, B, B')$$

$$\text{et} \quad \alpha M_1 = M(\alpha \varphi_1, B, B')$$

Proposition:

soit E et F deux e-v de dimensions respectivement n et p
 B et B' , respectivement base de E et F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

si $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées d'un vecteur x de E dans la base B .
 alors les coordonnées $(y_1, \dots, y_p)$ de $\varphi(x)$ dans la base B' sont données par:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = M(\varphi, B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Preuve :

on pose $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $B' = \{b_1, \dots, b_p\}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Hq: $Y = M(\varphi, B, B') X$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) \\ = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^p a_{ij} b_i$$

$$y = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) b_i$$

$$y = \sum_{i=1}^p y_i b_i$$

$$\sum_{i=1}^p \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) - y_i \right] b_i = 0_p$$

Donc $\forall 1 \leq i \leq p$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{pj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x-y, x+y+z, x-y-z)$$

soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \varphi(e_3)$

Théorème :

soit E, F et G trois K -ev de dimension finie, soient B et B' et B'' , respectivement une base de E , une base de F et une base de G .

soit $\varphi_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\varphi_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ alors :

$$M(\varphi_2 \circ \varphi_1, B, B'') = M(\varphi_2, B', B'') (M(\varphi_1, B, B'))$$

$\dim E = n$, $\dim F = p$, $\dim G = q$

$$Z = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) \Leftrightarrow Z = M(\varphi_2 \circ \varphi_1, B, B'') X$$

$$Z = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)) = M(\varphi_2, B', B'') Y$$

$$Y = M(\varphi_1, B, B') X$$

$$Z = M(\varphi_2, B', B'') \cdot M(\varphi_1, B, B') X$$

$$M(\varphi_2 \circ \varphi_1, B, B'') = M(\varphi_2, B', B'') \cdot M(\varphi_1, B, B')$$

Donc $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a :

$$M(\varphi_2 \circ \varphi_1, B, B'') X = M(\varphi_2, B', B'') M(\varphi_1, B, B') X$$

$$M(\varphi_2 \circ \varphi_1, B, B'') = M(\varphi_2, B', B'') M(\varphi_1, B, B')$$

Corollaire :

Soient E et F deux K -ev de dimensions finies, B et B' respectivement une base de E et une base de F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ si φ est bijective.

alors la matrice $M(\varphi, B, B')$ est inversible et on a

$$M(\varphi, B, B')^{-1} = M(\varphi^{-1}, B', B)$$

Preuve :

$$(E, B) \xrightarrow{\varphi} (F, B') \xrightarrow{\varphi^{-1}} (E, B)$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_E$$

$$M(\varphi^{-1} \circ \varphi, B) = I_n = M(\varphi^{-1}, B', B) M(\varphi, B, B')$$

Donc $M(\varphi, B, B')$ est inversible et son inverse est $M(\varphi^{-1}, B', B)$

* Théorème

une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants et pour calculer A^{-1} on résout le système linéaire $AX = Y$

Preuve :

$$A = M(\varphi, B) \quad B \text{ base canonique } \mathbb{R}^n$$

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

A inversible donc φ est bijective.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

$\varphi(e_1) \quad \dots \quad \varphi(e_n)$

III - Formules de changement de bases :

Définition :

Soient E un K -ev de dimension $n < +\infty$ et $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ deux bases de E on appelle matrice de passage de B_1 à B_2 la matrice carrée d'ordre n , notée $P(B_1, B_2)$ on a parfois P_1 et définie par.

$$P(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}$$

$\varphi(e_1) \quad \dots \quad \varphi(e_n)$

Pour $1 \leq i \leq n$ la i -ème colonne de $P(B_1, B_2)$ est formée par les coordonnées de f_i dans la base B_1 .

Exemple :

la famille $B' = \{(1, 2, 1), (0, -2, 1), (2, 0, 0)\}$
est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage de la base
canonique de $\mathbb{R}^3$ à B' est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

~~Matrice P~~

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n < +\infty$ et B_1 et B_2
deux bases de E . Alors $P(B_1, B_2)$ est inversible et on a :

$$P(B_1, B_2)^{-1} = P(B_2, B_1)$$

Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie $n < +\infty$ et B_1 et B_2 deux
bases de E et soit $x \in E$, si $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x
dans $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$
et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x dans la base $B_2 = \{p_1, \dots, p_n\}$
alors on a :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P(B_2, B_1)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P(B_1, B_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i p_i = \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{ji} y_i \right) e_j \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_j = \sum_{i=1}^n p_{ji} y_i \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_{1i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n p_{ni} y_i \end{pmatrix} = P(B_1, B_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

En conclusion,

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matrice formée par les coordonnées de x sur B_1

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ " " " " " B_2

$$\text{alors } Y = P(B_1, B_2)^{-1} X = P(B_2, B_1) X$$

Action d'un changement de base sur la matrice d'une application
linéaire :

Théorème :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, B_0 et B'_0
respectivement une base de E et une base de F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$
si B et B' sont, respectivement, une autre base de E et une de F .
alors,

$$M(\varphi, B, B') = P(B'_0, B'_0)^{-1} M(\varphi, B_0, B'_0) P(B_0, B)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (E, B_0) & \xrightarrow{M(\varphi, B_0, B_0)} & (F, B'_0) \\
 \uparrow P(B_0, B) & & \uparrow P(B'_0, B') \\
 (E, B) & \xrightarrow{M(\varphi, B, B')} & (F, B') \\
 & & \downarrow P^{-1}(B'_0, B')
 \end{array}$$

$$M(\varphi, B, B') = P(B'_0, B')^{-1} M(\varphi, B_0, B'_0) P(B_0, B)$$

Preuve :

Soit $x \in E$, on pose X formé par les coordonnées de x dans la base B_0 et X' par les coordonnées de x dans la base B .

Soit $y = \varphi(x) \in F$ on pose Y formé par les coordonnées de y dans la base B'_0 et Y' formé par " " " B' .

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow Y = M(\varphi, B_0, B'_0) X$$

$$\Leftrightarrow Y' = M(\varphi, B, B') X'$$

$$X' = P(B_0, B)^{-1} X \Rightarrow X = P(B_0, B) X'$$

$$Y' = P(B'_0, B')^{-1} Y \Rightarrow Y = P(B'_0, B') Y'$$

$$Y = M(\varphi, B_0, B'_0) X \Leftrightarrow P(B'_0, B') Y' = M(\varphi, B_0, B'_0) P(B_0, B) X'$$

$$\Leftrightarrow Y' = P(B'_0, B')^{-1} M(\varphi, B_0, B'_0) P(B_0, B) X'$$

$$Y' = M(\varphi, B, B') X'$$

Donc :

$$M(\varphi, B, B') = P(B'_0, B')^{-1} M(\varphi, B_0, B'_0) P(B_0, B)$$

Corollaire :

Soient E un K -ev de dimension finie, B_0 et B_1 deux bases de E et φ un endomorphisme de E .

Alors la matrice de

$$M(\varphi, B_1) = P(B_0, B_1)^{-1} M(\varphi, B_0) P(B_0, B_1)$$

Définition

Deux matrices carrées A et B d'ordre n sont dites semblables s'il existe une matrice carrée inversible $P \in M_n(K)$ telle que

$$B = P^{-1} A P$$

fstg

TRAVAUX DIRIGES

OTD'S **fstg**

CONTROLES

EXE

SHARE

EXERCICES

Ω

Ω

Ω

Ω

ELECTRICITE

CC'S

INFORMATIQUE

DOCUMENT

TD'S

COURS

www.facebook.com/FSTG.SHARE