

Chap 2:

Déterminants

I- Déterminant d'une matrice carrée:

soit A une matrice carrée d'ordre n .
pour tout $1 \leq i, j \leq n$ on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de A en enlevant la i ème ligne et j ème colonne de A .

Exemple $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}$$

soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. le déterminant de A est le scalaire, noté $\det(A)$ défini par la récurrence suivant:

1. $n=1$

$$A = a_{11}$$

$$\det(A) = a_{11}$$

2. $n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3. $n \geq 3$

et pour $1 \leq i, j \leq n$ on a l'une des formules équivalentes suivantes

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

* et le développement suivant la i ème ligne:

ou le développement suivant la j ème colonne:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

on note aussi le déterminant de $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ ou } \det(A) = |a_{ij}|$$

Exemple:

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{on développe } \det(A) &= \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a'' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ &= a(b'c'' - c'b'') - a'(bc'' - c'b'') + a''(bc' - c'b') \\ &= abc' - ac'b'' - a'bc'' + a'a''c + abc' - a''b'c \end{aligned}$$

Méthode Pratique de Calcul d'un déterminant d'ordre 2 et 3.

$n=2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$n=3$:

Det ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'b'c''$$

Propriétés

1. Pour toute matrice $A \in M_n(K)$ on a $\det(A^t) = \det(A)$
2. Si $A \in M_n(K)$ est triangulaire (supérieure ou inférieure) alors le déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale.
3. En particulier le déterminant de la matrice unité est égal à 1.

II - Propriétés.

Théorème 1

Soient $A, B \in M_n(K)$ alors $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

En particulier, si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Si A et B sont deux matrices semblables alors $\det(A) = \det(B)$

Preuve

A et B semblables $\Rightarrow \exists P$ inversible tq $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Soit E un K -ev de dimension n et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .
On appelle déterminants des n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans la base B
et on note

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) \text{ ou encore } |v_1, \dots, v_n|_B$$

Le déterminant de la matrice $V = (v_1, \dots, v_n)$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ou pour } 1 \leq i \leq n \quad v_i = v_{i1}e_1 + \dots + v_{in}e_n$$

soit $A \in M_n(K)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (c_1, \dots, c_n) \in K^n$$

$$\det(A) = \det_B(c_1, \dots, c_n)$$

B : base canonique de K^n .

Théorème :

Avec la notation ci-dessus, on a

1. $\forall \lambda \in K$

$$\star \det(c_1, \dots, \lambda c_k, \dots, c_n) = \lambda \det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n)$$

$$\star \det(\lambda c_1, \dots, \lambda c_n) = \lambda^n \det(c_1, \dots, c_n)$$

2. si l'une des colonnes c_k est la somme de deux colonnes $a_k + b_k$

$$\text{alors : } \det(c_1, \dots, (a_k + b_k), \dots, c_n) = \det(c_1, \dots, a_k, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, b_k, \dots, c_n)$$

3. si on échange deux colonnes de la matrice A , alors le déterminant de A change de signe c'est-à-dire :

$$\det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -\det(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n)$$

Ex 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{En particulier si } c_i = c_j \text{ on a : } \det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_i, \dots, c_n) = 0.$$

Proposition : soit $A \in M_n(K)$. Alors :

1. si deux colonnes de la matrice A sont égales alors $\det(A) = 0$

2. si l'une des colonnes de A est nulle alors $\det(A) = 0$

3. Plus généralement, si l'une des colonnes est une combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$

4. on ne modifie pas la valeur de $\det(A)$ en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Ex :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -16$$

III - Determinants d'un endomorphisme:

si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , on pose

$$\det(f) = \det(M(f, B))$$

où B est une base quelconque de E cette définition a un sens car:

soient B, B' deux bases de E et $P = P(B, B')$

$$f(E, B) \longrightarrow (E, B)$$

$$f(E, B') \longrightarrow (E, B')$$

$$M(f, B) = P^{-1} M(f, B') P$$

$$\begin{aligned} \det(M(f, B)) &= \det(P^{-1} M(f, B') P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(M(f, B')) \det(P) \\ &= \det(M(f, B')) \end{aligned}$$

Ex:

$$f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto f(P) = XP' + 2P$$

$$B = \{1, x, x^2\}$$

$$f(1) = 2$$

$$f(x) = 3x$$

$$f(x^2) = 4x^2$$

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M(f, B)) = 24$$

IV - Applications des déterminants:

1. Indépendance linéaire de (n) vecteurs dans un (ev) de dimension (n) :
théorème:

soit E un $\mathbb{K}$ -ev $\dim E = n$ (+ ou soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E

Alors n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ forment une base de E si $\det_B(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

exemple:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$v_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$v_3 = (1, 1, 0)$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base de E si $\det_B(v_1, v_2, v_3) \neq 0$

$$\det_B(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0 \text{ donc}$$

2- Calcul d'inverse d'une matrice carrée inversible:

si a_{ij} est un coefficient d'une matrice $A \in M_n(K)$ on appelle **cofacteur** le nombre noté $\text{cof}(a_{ij})$ défini par:

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

où A_{ij} est la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ extraite de A en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne.

La **comatrice** de A , notée $\text{com}(A)$, est obtenue en remplaçant chaque terme de la matrice par $\text{cof}(a_{ij})$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{cof}(a) = (-1)^{1+1} d = d$$

$$\text{cof}(b) = (-1)^{1+2} c = -c$$

$$\text{cof}(c) = (-1)^{2+1} b = -b$$

$$\text{cof}(d) = a$$

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Théorème: soit $A \in M_n(K)$ ou a.

$$1. A(\text{com}(A))^t = \det(A) I_n$$

2. En particulier, A est inversible si et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

$$\text{et dans ce cas } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^t$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

$$\text{si } ad - bc \neq 0 \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} b & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2-

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 4$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} |0\ 1| & -|2\ 1| & |2\ 0| \\ |1\ 2| & |1\ 2| & -|1\ 1| \\ |0\ 1| & -|2\ 1| & |1\ 0| \end{pmatrix}^t$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3- Calcul du rang d'une matrice.

Le rang d'une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ noté $\text{rg}(A)$, est la dimension du sev de $\mathbb{K}^p$ engendré par les colonnes $\{c_1, \dots, c_n\}$ de A .

Définition: soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq \min(p, n)$ on appelle déterminant d'ordre k extrait de A , le déterminant de toute matrice carrée, obtenue en supprimant dans A , $(p-k)$ lignes et $(n-k)$ colonnes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

des déterminants $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

sont deux déterminants d'ordre 3 et 2

Théorème:

soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et soit p le plus grand entier $k \leq \min(p, n)$ tel qu'il existe un déterminant non nul, d'ordre k , extrait de A alors $\text{rg}(A) = p$

Exemple: Étudier suivant les valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \text{rg} \leq 3$$

$$\det(A) = +abc - abc = 0$$

$$0 \leq \text{rg} \leq 3 \\ \det(A) = 0$$

$$\text{Donc } 0 \leq \text{rg} \leq 2$$

• si $a = b = c = 0$ la matrice nulle $\text{rg}(A) = 0$

• si $a \neq 0$ $\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \neq 0$

$$\text{rg}(A) = 2$$

• si $b \neq 0$ $\begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{vmatrix} = b^2 \neq 0$

$$\text{rg}(A) = 2$$

• si $c \neq 0$ $\begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} = c^2 \neq 0$

$$\text{rg}(A) = 2$$

conclusion: $\begin{cases} 0 & \text{si } a = b = c = 0 \\ 2 & \text{si } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0 \end{cases}$

fstg

TRAVAUX DIRIGES

OTD'S **fstg**

CONTROLES

EXE

SHARE

EXE

EXERCICES

Ω

Ω

Ω

Ω

ELECTRICITE

CC'S

INFORMATIQUE

DOCUMENT

TD'S

COURS

www.facebook.com/FSTG.SHARE