

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I- Valeurs propres et vecteurs propres.

Définition:

Soit $A \in M_n(K)$. on dit que $x \in K^n$ est un vecteur propre de A si et seulement si:

- i) $x \neq 0_{K^n}$
- ii) $\exists \lambda \in K, Ax = \lambda x$

si x est un vecteur propre de A , alors le scalaire λ de ii) est la valeur propre de A associée à x .

En abrégé on écrit $\vec{v}_p$ pour vecteur propre.
 λ_p pour valeur propre.

Proposition:

un scalaire $\lambda \in K$ est une vp de A si $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{K^n}\}$

Preuve:

let v_p de A si $\exists x \neq 0_{K^n} / Ax = \lambda x$

Donc $(A - \lambda I_n)x = 0$

Donc $x \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

Donc $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{K^n}\}$

Rq:

si $\lambda = 0$ est une vp de A
 alors $\text{Ker}(A) \neq \{0_{K^n}\}$

Définition:

L'ensemble de tout les vecteurs propres associés à une v.p λ complète par le vecteur nul, $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est appelé sous-espace propre associé à λ .

La dimension $\dim(E_\lambda(A))$ est appelée multiplicité géométrique de la valeur propre λ .

Définition:

L'ensemble de tout les valeurs propres de A est appelé spectre de A
 noté $\sigma(A) \subset K$

Proposition

Deux matrices semblables ont même spectre (on les mêmes valeurs propres)

Preuve:

si $A' = P^{-1}AP$ et si x et $\vec{v}_p$ de A alors $(P^{-1}x)$ est vecteur propre de A' car:

$$A'(P^{-1}x) = P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax$$

$$Ax = \lambda x$$

$$= P^{-1}A(x)$$

$$= \lambda(P^{-1}x)$$

$x \neq 0$ vecteur propre de A .

$P^{-1}x$ $\vec{v}_p$ de A' associée à λ

Proposition:

on a: $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Preuve:

$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Rightarrow A - \lambda I_n$ non inversible

$\lambda \in \sigma(A) \exists x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ tq $(A - \lambda I_n)x = 0_{\mathbb{R}^n}$

$$\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Définition: le polynôme $P_A(x) = \det(A - xI_n)$

s'appelle le polynôme caractéristique de A
c'est bien un polynôme à une indéterminée car:

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

on a $d^0 P_A(x) = n$ et le terme du plus haut degré
de $P_A(x) = (-1)^n x^n$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) - 4 \\ &= 3 - 2 - 3x + x^2 - 4 \\ &= x^2 - 4x - 1 \end{aligned}$$

Rq: i) le terme du plus bas degré est $P_A(0) = \det(A)$

ii) si deux matrices A et B semblables, elles ont même polynômes caractéristiques

A et B semblables $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} P_B(x) &= \det(B - xI_n) = \det(P^{-1}AP - xP^{-1}P) \\ &= \det(P^{-1}(A - xI_n)P) \\ &= \det(A - xI_n) \end{aligned}$$

corollaire:

on a $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si λ est racine de $P_A(x)$

corollaire:

Toute matrice carrée d'ordre n admet au plus n v.p.

corollaire:

si $\mathbb{R} = \mathbb{C}$ toute matrice possède au moins une v.p.

Il existe des matrices à coefficients réels sans v.p. dans $\mathbb{R}$.

Exemple:

soit $\theta \neq 0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \det(A - xI_n)$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta - x & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - x \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\theta - x)^2 + \sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta - 2\cos\theta x + x^2 + \sin^2\theta$$

$$P_A(x) = x^2 - 2\cos\theta x + 1$$

Définition:

Soit E un E sur K et $E_1, \dots, E_p$ s.e.v. de E .
La somme $E_1 + \dots + E_p$ est une somme directe si tout vecteur x s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in E_i$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ et on note $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.

Théorème:

Soit $M \in M_n(K)$ soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des λ -p distincts des λ -e.
Soit $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ des (s.e.v) propres associées respectivement au λ -p $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

$$Mg: E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

Preuve:

on montre par récurrence
si $p=2$ (λ nombre de λ -p)
Mg: $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2}$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_{\lambda_1}$ et $x_2 \in E_{\lambda_2}$

$$\text{Supposons } x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = 0$$

$$x_1 - y_1 \in E_{\lambda_1} \quad \text{et} \quad x_2 - y_2 \in E_{\lambda_2}$$

$$M(x_1 - y_1) = \lambda_1(x_1 - y_1) \quad \text{et} \quad M(x_2 - y_2) = \lambda_2(x_2 - y_2)$$

Appliquons $\alpha \oplus$ on a:

$$\lambda_1(x_1 - y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2) = 0 \quad \oplus \oplus$$

d'autre part multiplions $\oplus$ par λ_2 on obtient:

$$\lambda_1(x_1 - y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2) = 0 \quad \oplus \oplus \oplus$$

$$\oplus \oplus - \oplus \oplus \oplus \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x_2 - y_2) = 0$$

$$\text{or } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{donc} \quad x_2 = y_2$$

de même on montre que $x_1 = y_1$
supposons que la p.p.t est vraie pour $\forall (p-1)$ et démontrons la pour (p) valeurs propres.

Soient $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}$ des s.e.v ($\lambda_i \in \lambda_j$ $1 \leq i, j \leq p$)

Soit $x \in E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}$ Supp. que:

$$x = x_1 + \dots + x_p = y_1 + \dots + y_p$$

appliquons $M \vec{a} \Rightarrow \lambda_1(x_1 - y_1) + \dots + \lambda_p(x_p - y_p) = 0 \quad (**)$

multiplions $(*)$ par λ_p

$$\lambda_p(x_1 - y_1) + \dots + \lambda_p(x_p - y_p) \quad (*) (*) (*)$$

$$(**) - (*) (*) (*) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_p)(x_1 - y_1) + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)(x_{p-1} - y_{p-1}) = 0$$

$$\text{ou } E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

d'après l'unicité de l'écriture de 0 on a:

$$(\lambda_i - \lambda_p)(x_i - y_i) = 0 \quad x_i = y_i \quad 1 \leq i \leq p-1$$

$$\text{d'après } (*) \quad x_p = y_p$$

Théorème:

soit $M \in M_n(K)$ supp que M possède de v.p. λ de multiplicité égal à m_λ alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$

Preuve

$$E_\lambda \neq \{0\} \quad \text{donc} \quad \dim E_\lambda \geq 1$$

$$\text{mq } \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

$$\text{si } m_\lambda = n \text{ alors } E_\lambda = K \text{ et } M = \lambda I_n$$

$$\text{si } m_\lambda < n$$

soit $e_1, \dots, e_{m_\lambda}$ une base de E_λ .

d'après le th de la base incomplète il existe $n - m_\lambda$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $f_1, \dots, f_{n-m_\lambda}$ tq:

$$B = \{e_1, \dots, e_{m_\lambda}, f_1, \dots, f_{n-m_\lambda}\}$$

base de $\mathbb{R}^n$ et est associé à un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$
la matrice M de φ dans B est de la forme

$$M' = M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{m_\lambda} \\ \varphi(e_1) \varphi(e_{m_\lambda}) \\ \vdots \\ \varphi(f_1) \varphi(f_{n-m_\lambda}) \end{matrix}$$

$$P_M(X) = P_{M'}(X) = \det(M' - X I_n)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - X & 0 & \dots & 0 & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda - X & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda - X & \\ 0 & & & & & \lambda - X \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \lambda - X \end{vmatrix} = (\lambda - X)^{m_\lambda} \det(\Delta - X)$$

Donc la multiplicité de la v.p. λ est $\geq m_\lambda$ d'où $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$

Corollaire: soient $M \in M_n(K)$ supp que M possède une valeur propre simple alors:

$$\dim E_\lambda = 1$$

Definition: Soit $M \in M_n(K)$, La matrice M est diagonalisable sur K si M est semblable à une matrice diagonale.

(càd: $\exists P \in M_n(K)$ inversible et $\exists D \in M_n(K)$ diagonale tq $M = PDP^{-1}$)

Rq:

une matrice $M \in M_n(K)$ associée à un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ lorsque M est diagonalisable, la matrice diagonale D est au même endomorphisme φ mais D existe dans une base formée par de M .

condition nécessaire est suffisante pour qu'une matrice $M \in M_n(K)$ soit diagonalisable sur K .

Theorème: Soit $M \in M_n(K)$ est diagonalisable sur K les 2 conditions sont suffisantes

- ① le polynôme caractéristique $P_M(K)$ est scindé sur K .
- ② Pour chaque v.p. $\lambda \in M$ on a: $\dim E_\lambda$ multiplicité de λ v.p.

$$\dim(E_\lambda) = \dim(A - \lambda I)$$

Exemple diagonalisable:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } A \text{ est diagonalisable}$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 4 \\ 3 & -4-X & 12 \\ 1 & -2 & 5-X \end{vmatrix}$$

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 2(2-X) & 4 \\ 3 & 2-X & 12 \\ 1 & 0 & 5-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X) [(4+X)(X-5) + 20]$$

$$= (2-X)(X)(X-1)$$

$$\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$$

$$\dim E_\lambda = 1$$

$P_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$E_{\lambda=0} \text{ ? on } AX = 0X \text{ ? } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -2y + 3z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$E_{\lambda=0} = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{vect} \{ (-4, 3, 2) \}$$

$$\bullet E_{\lambda=1} \{$$

$$AX = X$$

$$\begin{cases} x + 4z = 0 \\ 2x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_{\lambda=1} = \text{vect} \{ (-4, 0, 1) \}$$

$$\bullet E_{\lambda=2}$$

$$AX = 2X$$

$$\begin{cases} 4z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$E_{\lambda=2} = \text{vect} \{ (1, \frac{1}{2}, 0) \}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} =$$

$$A = PDP^{-1}$$

Trigonalisation:

Definition:

Soit $A \in M_n(K)$. on dit que A est trigonalisable sur K si la matrice A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure c'est à dire

$$\exists P \in GL_n(K) \text{ inversible tq } A = PTP^{-1}$$

Proposition:

une matrice A est trigonalisable sur K si et seulement si le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé sur K .

Preuve:

supposons que A est trigonalisable.

Alors $\exists P$ inversible et $\exists T$ triangulaire supérieure.

tq:

$$A = PTP^{-1}$$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & a_{22} & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est semblable à T donc $P_T(X) = P_A(X)$

$$P_T(X) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & * & * \\ 0 & a_{22} - X & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(X) = \prod (a_{ii} - X) \quad \text{c'est un polynôme scindé sur } K.$$

Inversement on suppose $P_A(X)$ scindé sur K et on fait un raisonnement par récurrence sur n (taille de matrice).

$n=1$:

$$A = a_{11}$$

$$P_A(X) = a_{11} - X$$

$$\lambda = a_{11}$$

scindé et A triangulaire supérieure.

supposons le résultat en dimension $n-1$ (c-à-d)

$\forall A \in M_{n-1}(K), P_A(X)$ scindé sur $K \Rightarrow A$ trigonalisable sur K .

soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $P_A(x) = \prod_{i=1}^n (d_i - x)$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, comme λ_i est une v.p. de A , il existe un vecteur propre $v_i \in \mathbb{K}^n$; $v_i \neq 0$ associé à λ_i .

$\{v_i\}$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète
 $\exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ tq $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{K}^n$.

La matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base B est semblable à A et est de la forme $P^{-1}AP = A'$

(A associé à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{matrix} \end{array} \right) \quad \tilde{A} \in M_{n-m, m}(K)$$

$$P_A(x) = P_{A'}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} - xI_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = (\lambda_1 - x) \det(\tilde{A} - xI_n)$$

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i - x) = (\lambda_1 - x) \det(\tilde{A} - xI_n)$$

$$\Rightarrow P_A(x) = \prod_{i=2}^n (\lambda_i - x)$$

$P_A(x)$ est scindé sur K .

D'après l'hypothèse de récurrence A est trigonalisable
 $\exists \tilde{Q} \in M_n(K)$ inversible, $\exists \tilde{T} \in M_n(K)$ triangulaire supérieure
 tq $\tilde{A} = \tilde{Q} \tilde{T} \tilde{Q}^{-1}$

on page $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \sim & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

on a $\det \mathcal{Q} = \det (\tilde{\mathcal{Q}}) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ac' + cd' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$\Phi \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \Phi_2 \Phi_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = I_n$$

$$\tilde{Q}^{-1} A' \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{Q}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & + & + & + \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{Q} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & (* * \dots *) \tilde{\varphi} \\ 0 & \tilde{\varphi} & \tilde{\varphi} \\ 0 & \tilde{\varphi}' & \tilde{\varphi} \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & (* \dots *) \tilde{\varphi} \\ 0 & \tilde{\tau} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} A Q = T \quad \text{triangulaire supérieure}$$

$$\text{ou: } A' = P^{-1} A P$$

$$Q^{-1} P^{-1} A P Q = T$$

$$(PQ)^{-1} A (PQ) = T$$

Donc A semblable à T : Triangulaire supérieure.

Exemple:

Réduire.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & 2 & -3 \\ 5 & 1-x & -5 \\ -3 & 4 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-x & 2 & -3 \\ 0 & 1-x & -5 \\ -3-x & 4 & -x \end{vmatrix} \\ &= -(1+x) \begin{vmatrix} 1-x & -5 \\ 4 & -x \end{vmatrix} - (3-x) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1-x & -5 \end{vmatrix} \\ &= -(1+x)(-x(1-x) + 20) - (3-x)(-10 - 3(1-x)) \\ &= -(1+x)(20 - x(1-x)) + (3-x)(10 + 3(1-x)) \\ &= \begin{vmatrix} (1-x) & 2 & -3 \\ (1-x) & 1-x & -5 \\ (1-x) & 4 & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1-x & -5 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix} \\ &= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3-x & -x+5 \\ 0 & -3-x & -5+x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -(1+x) & -2 \\ 0 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & -x+5 \\ -3-x & -5+x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -(1+x) & -2 \\ 2 & (3-x) \end{vmatrix} \\ &= (1-x) [(x+1)(x-3) + 4] \\ &= (1-x)^3 \end{aligned}$$

λ est une vp triple de A.

$$E_{\lambda=1} = \text{Ker}(A - I)$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 5z = 0 \\ -3x + 4y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 = z \\ y = 3 \end{matrix}$$

$$E_{\lambda=1} = \text{Vect}_3\{(1, 2, 2)\} \Rightarrow A \text{ non diagonalisable.}$$

$$P_A(x) = (1-x)^3 \text{ scinde sur } \mathbb{R}; \text{ Donc } A \text{ trigonalisable sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{on pose } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on prend } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P matrice de passage de $\mathbb{R}^3$ dans $B = (v_1, v_2, v_3)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_{\tilde{A}}(x) = (2-x)^2$$

$$E_{\lambda=1} = \text{Ker}(\tilde{A} - I)$$

$$\begin{cases} x - 2y = x \\ 2x + 3y = y \end{cases} \Rightarrow x = -y$$

$$\text{Ker}(\tilde{A} - I) = \text{vet}(1, -1)$$

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}^{-1} \tilde{A} \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{J}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1} A' \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fstg

TRAVAUX DIRIGES

OTD'S **fstg**

CONTROLES

EXERCICES

SHARE

INFORMATIQUE

DOCUMENT

Ω
Ω
Ω
Ω

ELECTRICITE

CC'S

TD'S

COURS

www.facebook.com/FSTG.SHARE