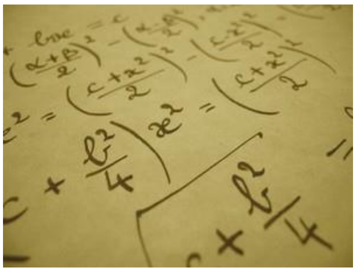
Chapitre 3 : Applications lineaires - Algèbre semestre 2-SMPC

UNIVERSITE CADI AYYAD MARRAKECH
جامعة القاضي عياض مراكش

FSSM
كلية العلوم السملالية
Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

Filière DEUG :

SMP : Semestre 2



Cours D'Algèbre

Filères SMP-SMC

Abdelkhalek El ARNI et Brahim SADIK

Semestre 2

Rapide Way

مع تحيات فريق إعداد الامتحانات و المباريات
موقع طريق المعرفة
www.rapideway.org
أي ملاحظات أو مشاركات ترسل على :
rapideway@gmail.com
info@rapideway.org

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est dite $\mathbb{K}$-linéaire (ou simplement linéaire) si :*

- $\forall v, w \in E \ \ f(v+w) = f(v) + f(w)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \ \forall v \in E \ \ f(\alpha v) = \alpha f(v)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on le note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ou simplement $\mathcal{L}(E,F)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion.

Proposition 3.1.1 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \ \forall v, w \in E \quad f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w).$$

Remarque 3.1.1 *1) La linéarité d'une application dépend de $\mathbb{K}$. L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui envoie un complexe z en son conjugué $\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.*

2) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$f(0_E) = 0_F \text{ et } \forall v \in E \ \ f(-v) = -f(v).$$

Exemple 3.1.1 *1) L'application f de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$ définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ x-z \end{pmatrix} \end{array}$$

39

est une application linéaire.

2) *L'application g de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ définie par :*

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & & P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$$

où $P'(X)$ est la dérivée de $P(X)$ est une application linéaire.

Remarque 3.1.2 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est uniquement déterminée par les images $f(e_i), i = 1, \cdots, n$. En effet, soit $v \in E$; alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. On a f est linéaire, donc*

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i).$$

Définition 3.1.2 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker} f$ l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F.

$$\mathrm{Ker} f = \{v \in E \ : f(v) = 0_F\}.$$

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im} f$ l'ensemble des éléments de F qui sont l'image d'au moins un élément de E.

$$\mathrm{Im} f = \{w \in F \ \exists v \in E \ : f(v) = w\} = f(E)$$

Exemple 3.1.2 *Considérons les deux applications linéaires de l'exemple 3.1.1.*

1) *Calculons le noyau de f.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \ : x = -2y \text{ et } z = x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, *alors on a* $f(v) = w$ *où* $w = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{2} \\ -\beta \end{pmatrix}$. *Donc* $w \in \mathrm{Im} f$ *et par suite* $\mathrm{Im} f = \mathbb{K}^2$.

2) *Calculons le noyau de* g.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} g &= \{P \in \mathbb{K}[X] \ : P'(X) = 0\} \\ &= \{P \in \mathbb{K}[X] \ : P = c \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathbb{K} \end{aligned}$$

Calculons l'image de g.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} g &= \{Q \in \mathbb{K}[X] \ \exists P \in \mathbb{K}[X] \ : P'(X) = Q(X)\} \\ &= \mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 *Soit* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors*

1) $\mathrm{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
2) $\mathrm{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration.

1) Comme $f(0_E) = 0_F$ l'ensemble $\mathrm{Ker} f$ est non vide. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et soit $v, w \in \mathrm{Ker} f$, montrons que $\alpha v + \beta w \in \mathrm{Ker} f$. On a $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$ car f est $\mathbb{K}$-linéaire. Or $f(v) = f(w) = 0_F$ donc $f(\alpha v + \beta w) = 0_F$. D'après le corollaire 2.2.1, $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) L'ensemble $\mathrm{Im} f$ contient 0_F car $f(0_E) = 0_F$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et soit $v', w' \in \mathrm{Im} f$, montrons que $\alpha v' + \beta w' \in \mathrm{Im} f$. Il existe $v, w \in E$ tels que $f(v) = v'$ et $f(w) = w'$. Ainsi $\alpha v' + \beta w' = \alpha f(v) + \beta f(w) = f(\alpha v + \beta w)$ car f est $\mathbb{K}$-linéaire. D'où $\alpha v' + \beta w' \in \mathrm{Im} f$. Par le corollaire 2.2.1, $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. ♣

Théorème 3.1.2 *Soit* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors*

1) f *est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.
2) f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im} f = F$.

Démonstration.

1) L'application f est injective si et seulement si $\forall v, w \in E \ : f(v) = f(w) \Longrightarrow v = w$.

   i) $\Longrightarrow$) Supposons que f est injective et soit $v \in \mathrm{Ker} f$. Alors $f(v) = 0_F = f(0_E)$, ce qui implique $v = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.

ii) $\Longleftarrow$) Supposons que $\mathrm{Ker}f = \{0_E\}$ et soit $v, w \in E$ tels que $f(v) = f(w) = 0_F$. Comme f est linéaire on a $f(v) - f(w) = f(v - w) = 0_F$, donc $v - w = 0_E$ et $v = w$. D'où f est injective.

2) f est surjective si et seulement si pour tout $v' \in F$ il existe $v \in E$ tel que $f(v) = v'$. D'où f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}f = F$. ♣

Proposition 3.1.2 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}f$. C'est à dire $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.*

Démonstration. Soit $w \in \mathrm{Im}f$; alors il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$. Or $\mathcal{B}$ est une base de E donc il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Ceci implique que $w = f(v) = \alpha_1 f(e_1) + \cdots \alpha_n f(e_n)$. D'où $\mathrm{Im}f$ est engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. ♣

Remarque 3.1.3 *Le résultat de la dernière proposition simplifie le calcul de l'image d'une application linéaire et permet souvent d'en déterminer une base.*

Définition 3.1.3 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}f$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}f$.*

Remarque 3.1.4 *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et ona $\mathrm{rg}f = \mathrm{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.*

Exemple 3.1.3 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 3y \\ x - 2z \\ 2z + 3y \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors $V = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ engendre $\mathrm{Im}f$. On va utiliser la méthode décrite dans la section 2.5 pour calculer le rang de f. On a

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice des coordonnées des vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Une forme échelon du système correspondant à cette matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le rang de f est 2.

Le théorème suivant donne une relation entre le rang d'une application linéaire et la dimension de son noyau.

Théorème 3.1.3 *(Théorème du rang)*
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker} f) + \mathrm{rg} f = \dim(E)$$

Exemple 3.1.4 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ donc $\mathrm{rg} f = 2$.
De plus $f(e_1) = e_1, f(e_2) = -e_1$ et $f(e_3) = e_2$. Ceci implique que $e_1 \in \mathrm{Im} f$ et $e_2 \in \mathrm{Im} f$. Comme (e_1, e_2) est libre, on aura $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Définition 3.1.4 *Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On appelle composée des deux applications g et f l'application linéaire, notée $g \circ f$, de E dans G et qui est définie par :*

$$\forall v \in E \ : (g \circ f)(v) = g(f(v))$$

Exemple 3.1.5 *Soit*

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-3y \\ y+2z \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors l'application composée $g \circ f$ est donnée par :

$$g \circ f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 3y+6z \\ x-3y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 3.2.1 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $\mathcal{B}'$ une base de F. On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et on note $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de la famille $((f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans $\mathcal{B}'$.*

Remarque 3.2.1 *La matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ appartient à $\mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. La $j^{ème}$ colonne de $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ coincide avec le vecteur des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$.*

Exemple 3.2.1 *Soit l'application linéaire*

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ (respectivement $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$). Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2.2 *Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note la matrice d'une application linéaire de E dans E par $\mathrm{M}(f, \mathcal{B})$. On a $\mathrm{M}(f, \mathcal{B}) \in M_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 3.2.2 *Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On munit ce sous-espace vectoriel de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et on considère l'application linéaire :*

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) \end{array}$$

La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$. Soit $M_{p,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et à n colonnes. Alors il y'a une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{p,n}(\mathbb{K})$. A une application linéaire de E dans F correspond sa matrice relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qui est un élément de $M_{p,n}(\mathbb{K})$. Inversement, soit

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$$

une matrice de $M_{p,n}(\mathbb{K})$; alors elle est la matrice relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ donnée par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i \ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Autrement dit, la j^{ème} colonne de A coincide avec le vecteur des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}'$.

Exemple 3.2.3 *1) Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors A est la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc f est définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 2z \\ -x + 3y + z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}.$$

2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, A est la matrice de l'application linéaire f telle que $f(e_1) = u_1 + u_2$ et $f(e_2) = -u_1 + u_2 + 2u_3$. L'application f est donc définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ x+3y \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit v un vecteur représenté dans $\mathcal{B}$ par $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de v dans $\mathcal{B}$. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de $f(v)$ dans $\mathcal{B}'$. Alors on a

$$Y = AX.$$

Remarque 3.2.3 *Cette relation permet de calculer $f(v)$ connaissant uniquement $A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et le vecteur des coordonnées de v dans $\mathcal{B}$.*

Exemple 3.2.4 *Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à A relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Comme $v = X$ et $f(v) = Y$ alors :*

$$f(v) = Av = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2.1 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit E (respectivement F) de la base $\mathcal{B}$ (respectivement de la base $\mathcal{B}'$). Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

1) $\mathrm{Mat}(f + g, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') + \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$,

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ : \mathrm{Mat}(\alpha f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \alpha \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Proposition 3.2.2 *Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On munit E (respectivement F et G) de la base $\mathcal{B}$ (respectivement des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors*

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Exemple 3.2.5 *Considérons l'application linéaire composée présentée dans l'exemple 3.1.5. La matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la proposition précédente, la matrice de la composée $g \circ f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}) = BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Changement de bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E sera noté $\mathcal{L}(E)$. La matrice d'un élément de $\mathcal{L}(E)$ relativement à une base $\mathcal{B}$ est sa matrice lorsque E est muni de la base $\mathcal{B}$ au départ et en arrivée. Dans cette section, on étudiera l'effet du changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur de E et sur la matrice d'un endomorphisme de E.

Définition 3.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. La matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, s'appelle la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. La $j^{\grave{e}me}$ colonne de P coincide avec le vecteur des coordonnées de e'_j dans $\mathcal{B}$.*

Remarque 3.3.1 *La matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ coincide avec la matrice $\mathrm{Mat}(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ où id_E est l'application identité de E. C'est à dire $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.*

Exemple 3.3.1 *Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_c$ sa base canonique. On munit cet espace vectoriel d'une autre base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ où*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $e_1 = u_2 - u_3, e_2 = u_1 - u_2 + u_3$ et $e_3 = u_3$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.3.1 *Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et soit v un vecteur de E. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ et soit $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_2 \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$. Alors on a :*

$$X = PX'.$$

Exemple 3.3.2 *Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs :*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ils sont linéairement indépendants donc la famille libre $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ formée de trois éléments est une base de E. Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de E et soit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminons les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Donc le vecteur des coordonnées X' de v dans $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = PX'.$$

Cette dernière relation conduit à un système linéaire à une unique solution. On obtient donc

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.3.3 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni des deux bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$. Soit $Q(X) = 1 - X^2$ un élément de E. Déterminons les coordonnées de $Q(X)$ dans $\mathcal{B}'$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur des coordonnées de $Q(X)$ dans $\mathcal{B}$ est

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc le vecteur des coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $Q(X)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donné par la relation

$$X = PX'.$$

On obtient donc

$$X' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $Q(X)$ s'exprime dans la base $\mathcal{B}'$ comme suit $Q(X) = -2(X-1) - (X-1)^2$.

Théorème 3.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit f un endomorphisme de E de matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est donnée par :*

$$A' = P^{-1}AP.$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exemple 3.3.4 *Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni da sa base canonique $\mathcal{B}_c$ et soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la base de E formée par les vecteurs v_1, v_2, v_3 de l'exemple 3.3.2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 2z \\ -x + 3y + z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$. On a la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

De plus la matrice de f relativement à $\mathcal{B}_c$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc d'après le dernier théorème, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -33 & 120 & -31 \\ -9 & 32 & -9 \\ 6 & -21 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.3.5 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni des deux bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ et soit f l'application linéaire donnée dans l'exemple 3.2.2. La matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le théorème précédent, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3.2 *Deux matrices carrées d'ordre n sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible P d'ordre n telle que*

$$A' = P^{-1}AP$$

Remarque 3.3.2 *Deux matrices sont semblables si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.*

Remarque 3.3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et*

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $j = 1, \ldots, n$, soit $v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$. Comme P est inversible alors $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E et P est égale à la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Donc $P = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ et $P^{-1} = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Par suite pour calculer P^{-1} il suffit d'écrire les éléments de $\mathcal{B}$ en fonction des éléments de $\mathcal{B}'$.

Exemple 3.3.6 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Comme A est inversible, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et A coincide avec la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Le calcul de A^{-1} se ramène à l'expression des $e_i, i = 1, 2, 3$ en fonction de v_1, v_2, v_3. On a

$$e_1 = v_1 - v_2 - v_3, e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + v_2 + \frac{3}{4}v_3, e_3 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{4}v_3.$$

Il s'ensuit que :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles linéaires?

1) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \end{pmatrix}.$

2) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy.$

3) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad z \mapsto \mathrm{Re}(z).$

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par : $f(e_1) = f_1, f(e_2) = f_2, f(e_3) = f_1 + f_2$ où (e_1, e_2, e_3) (respectivement (f_1, f_2)) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (respectivement $\mathbb{R}^2$).

- Déterminer f.
- Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.

Exercice 3

Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

1) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$.

3) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z + i\bar{z}$.

4) $\mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \quad P \mapsto P - (X+1)P'$.

Exercice 3

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M^2 + 2M - 3I_3$.

2) Calculer M^{-1}.

3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la matrice M^n en fonction de M et I_3.