

Cours d'électricité

Champ et potentiel électrostatique

I - Champ électrostatique

on dit qu'il existe un champ électrostatique en un point de l'espace si en ce point peuvent se manifester des forces capables d'agir sur les charges électriques.

1) champ créé par une charge ponctuelle

On dispose 3 charges Q, q, q'

1°/ Si q est seule en P $\vec{F}_{qq} = 0$

$\Rightarrow$ aucune force au point P

2°/ Si Q en O et q en $P \Rightarrow$ la charge q est soumise à une force exercée par la charge Q .

$$\vec{F}_{qQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_{OP}$$

3°/ on remplace q par q' $\Rightarrow Q$ est soumise à une force exercée par q'

$$\vec{F}_{Qq'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq'}{r^2} \vec{u}_{OP}$$

on pose $\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_{OP}$ E_P ne dépend que de Q et P

$$\vec{F}_{qQ} = q \vec{E}_P \quad \vec{F}_{Qq'} = q' \vec{E}_P$$

$\vec{E}_P$ est appelé vecteur champ électrostatique créé au point P par la charge Q

La charge Q qui a créé le champ $\vec{E}_P$ en tout point de l'espace est appelé la source du champ

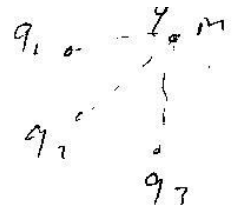
La charge q (q') est moyen de mettre en évidence la présence du champ électrostatique

Le champ $\vec{E}$ est exprimé en N/C

2°/ champ créé par une distribution de charge discontinue

(10)

Pour un ensemble de charges ponctuelles
On a trouvé d'après le superposition que
la force résultante exercée sur une charge q_0



$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i}{R_i^2} \vec{u}_i$$

On en déduit que le champ résultant est :

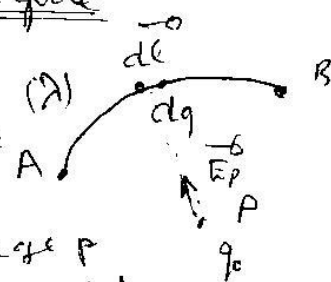
$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \vec{u}_i \quad \text{d'où} \quad \vec{E}_p = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

avec $\vec{E}_i$ est le champ créé par q_i en un point de l'espace.

3°/ champ créé par des distributions continues de charges.

a) distribution linéique

Soit un élément $d\vec{l}$ de la courbe (A) contenant une charge élémentaire dq avec $dq = \lambda dl$



dq on peut l'approximer à une charge ponctuelle. La charge dq crée en point P

le champ élémentaire $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \vec{u}$ avec $dq = \lambda dl$

par conséquent est :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{R^2} \vec{u}$$

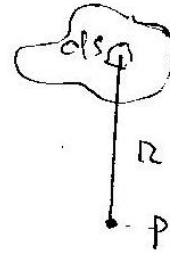
Si $\lambda = \text{const}$ (distribution uniforme)

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dl}{R^2} \vec{u}$$

b) Distribution surfacique :

De même ; on a pour une distribution surfacique
 $dq = \sigma dS$ σ : densité de charge surfacique.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$



c) Distribution volumique :

on a $dq = \rho d\tau$ ($d\tau$ élé de volume).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}$$



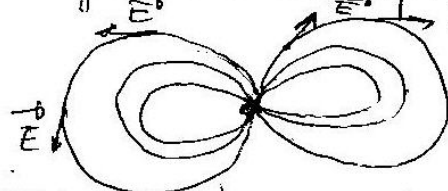
4° Topographie du champ électrique.

a) Représentation de $\vec{E}$

$$\vec{E} \begin{cases} \text{Module } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \\ \text{Sens : sens de } \vec{u} \end{cases} \text{ pour charge ponctuelle.}$$



b. Lignes de champ



La ligne de champ est une courbe tangente au vecteur champ $\vec{E}$ en tous ces points

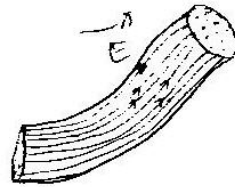
par convention

- * Une ligne de champ est orientée suivant le sens de $\vec{E}$
- * En générale une ligne de champ part du point la charge positive vers une charge négative.
- * En tout point de l'espace se passe une ligne sauf dans des endroits (D) où il y a des charges.

* Pour établir l'équation d'une ligne de champ il suffit d'écrire $\vec{E} \wedge d\vec{l} = 0$

C. tube de champ:

tube de champ ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour donné.



II Potentiel électrique:

1°/ Circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle.

Soit la charge q et une courbe non chargée le champ créé en un point P

$$\text{soit } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

La circulation de $\vec{E}$ est $\mathcal{E} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} d\vec{l}$$

$$PP' = d\vec{l} = d\vec{r} \rightarrow \begin{cases} OP' = OP + PP' \\ \vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + d\vec{l} \Rightarrow d\vec{r} = d\vec{l} \end{cases}$$

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} d\vec{r} \quad \text{or} \quad r d\vec{r} = \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr$$

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{r dr}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_A} - \frac{q}{r_B} \right]$$

Remarque : si la courbe $\mathcal{E}$ est fermée $\Rightarrow \mathcal{E} = 0$ la circulation est conservative.

$$\text{on pose : } V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cte}$$

(12)

$V(r)$ est le potentiel électrique créé par la charge q au point P

le potentiel est défini à une constante près.

Si il n'y a pas de charge à l'infini on posera

$$V(\infty) = 0$$

$$V(\infty) = C + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -C$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Si il y a de charge à l'infini, il faut prendre une origine des potentiels

Remarque: L'espace électrique peut être décrit 2 façons

{ champ de vecteurs $\vec{E}$
ou scalaire : V

2° Potentiel créé par ensemble de charge:

a) Distributions de discontinues de charges:

$$V(r) = \sum V_i \text{ ou } V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

b) Distribution continue de charge.

* Distribution linéique (1D) $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} + Cst$

* Distribution surfacique (2D) $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r} + Cst$

* " " Volumique (3D) $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{r} + Cst.$

3° Relation entre champ et potentiel en un point donné:

Soit un point $M(x, y, z)$ de potentiel $V(M)$ créé par une charge ponctuelle, n charges ou par une distribution continue quelconque.

(14)

On a par définition
$$V(M) = - \int_{\vec{b}}^{\vec{a}} \vec{E} d\vec{\ell} \text{ ou encore}$$
$$dV(M) = - \vec{E} d\vec{\ell}$$

$\vec{E}$ et $d\vec{\ell}$ ont pour composante respectivement

$$\vec{E} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \text{ et } d\vec{\ell} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

$$dV(M) = - \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

le potentiel $V(M)$ est une fonction continue au voisinage du point M et possède des dérivées partielles.

alors on dit que $V(M)$ est une différentielle totale

$$dV(M) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$\vec{E} = - \text{grad } V(M)$ relation qui lie le champ au potentiel

Propriétés :

a) Si $d\vec{\ell}$ est un déplacement élémentaire quelconque.

donc
$$\vec{F} = \frac{q_0 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dS}{r^2} \vec{u}$$

3° Relation entre $\vec{E}$ et V

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

conséquence :

- * le champ dérive d'un potentiel
- * le champ a le même module que celui
- * du vecteur $\vec{\text{grad}}$, mais orienté dans le sens inverse
- * si le champ le potentiel est exprimé en (V) alors le champ est exprimé en V/m

4° Topographie du potentiel

a) Surfaces équipotentiellles :

Les surfaces équipotentiellles sont des surfaces sur lesquelles le potentiel reste constant ($V = \text{cte}$)

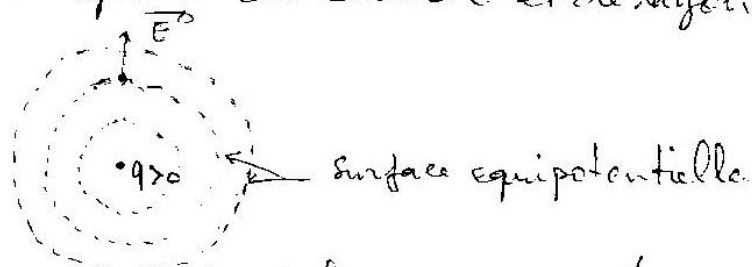
Exemple :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Surface équipotentielle $\Rightarrow V = \text{cte} \Rightarrow \frac{kq}{r} = \text{cte} \Rightarrow r = \text{cte}$

$$\text{or } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \text{cte} \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2) = \text{cte}$$

l'équation d'une sphère de centre O et de rayon r



Donc les surfaces équipotentiellles pour une charge ponctuelle sont des sphères.

b) Propriété :

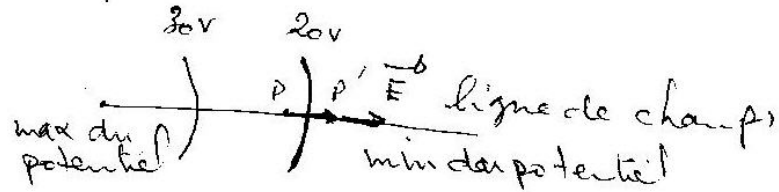
a) si dl est un déplacement élémentaire quelconque sur une surface équipotentielle

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

or $V = \text{cte} \Rightarrow dV = 0$ d'où $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

On en déduit que $\vec{E}$ est perpendiculaire avec $d\vec{l}$
Ceci implique que les lignes de champ sont orthogonales
aux surfaces équipotentielles.

B) le potentiel diminue quand on suit une
ligne de champ

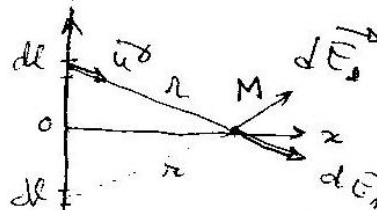


$$d\mathcal{E} = \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0 \text{ or } d\mathcal{E} = -dV \Rightarrow dV < 0$$

le passage de P en P', le potentiel diminue
 $\Rightarrow V_P < V_{P'}$

5% Application:

champ et potentiel créé par un fil infini, portant
une densité linéique de charge $\lambda (\lambda > 0)$ uniforme
en un point M de l'espace.



Soit un élément dl du fil ce dl contient une
charge élémentaire dq telle que $dq = \lambda dl$. Cette
 dq crée au point M un champ élémentaire $d\vec{E}_1(M)$

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} \text{ avec } \vec{u} \text{ vecteur unitaire.}$$

Soit un dl' du fil symétrique avec dl par rapport à (Ox)
Ce dl' contient $dq = \lambda dl'$ crée au point M un champ
élémentaire $d\vec{E}_2(M)$

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}'$$

par projection sur l'axe (Ox) et l'axe (Oy)

(Oy) les $d\vec{E}$ s'annulent

suivant l'axe les composantes s'ajoutent

Donc le champ Total est porté par ex tel que

$$\vec{E}(M) = E_x \vec{x}$$

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

$$(1) \quad dE_x = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

Exprimant r et dy en fonction de x .

$$\text{On a } \tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \left[dy = \frac{x d\alpha}{\cos^2 \alpha} \right] (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos \alpha}{x} \Rightarrow \left[\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} \right] (3)$$

On remplace les relations (2) et (3) dans (1)

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} d\alpha$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos \alpha d\alpha$$

le champ Total entre créé par le fil

$$\vec{E}(M) = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\sin \alpha \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{x}$$

* Détermination du potentiel

d'après la relation $\vec{E} = - \text{grad} V$ on a

$$E = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow dV = - E dx$$

$$\Rightarrow V = - \int E dx$$

$$dV = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

Le potentiel créé par le fil est :

$$V = - \int_0^x \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

$$V = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln x + Cste$$

Le potentiel est défini une constante près
on peut pas calculer cette constante car à l'infini
on a en tant que les charges.

