

Cours d'électricité

COURS D'ELECTRICITE

Rapels Mathématique

Le gradient:

C'est un opérateur vectoriel qui agit sur une fonction scalaire (fonction à trois variables x, y, z)

C'est un vecteur dont le produit scalaire par le vecteur de déplacement élémentaire.

$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ est la différentielle de la fonction scalaire $f(x, y, z)$

$$df(x, y, z) = \vec{\text{grad}} f(x, y, z) \cdot d\vec{OM}$$

En coordonnées cartésiennes:

$$\vec{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

$$\vec{\text{grad}} f(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ)

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{\varphi}$$

Divergence d'un vecteur. $\text{div} \vec{A}$

La divergence d'un vecteur est un opérateur scalaire défini par: $\boxed{\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

avec $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

exemple:

en coordonnées cartésiennes

$$\text{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

en coordonnées cylindriques.

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

en coordonnées sphériques

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation d'un vecteur

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur défini par :

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Le Laplacien d'une fonction Δf

Soit $f(x,y,z)$ une fonction à trois variables alors le Laplacien Δf de f est défini par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\nabla)^2 f$$

il y a aussi le Laplacien d'un vecteur $\Delta \vec{A}$

$$\Delta \vec{A} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Relation de passage entre intégrales.

$$a - \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Soit un vecteur $\vec{E}$ et $d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire sur une courbe (C) orientée arbitrairement.
la courbe (C) est fermée

(S) est la surface que repose sur la courbe fermée.

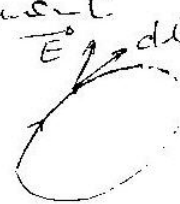
Sens du vecteur $d\vec{S}$ (vecteur surface élémentaire)

Sens de $d\vec{S}$ est lié par la règle du tire-bouchon

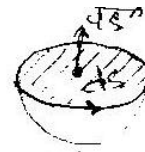
au sens de $d\vec{l}$ (au sens de parcours de (C))

$d\vec{S}$ est toujours perpendiculaire à la surface

$d\vec{S}$



$$b) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau$$



$\vec{E}$ vecteur défini en tout point de l'espace (S) est une surface fermée

remarque : puisque S est dirigée vers l'extérieur



V : le volume totale délimité par la surface fermée
alors :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau$$

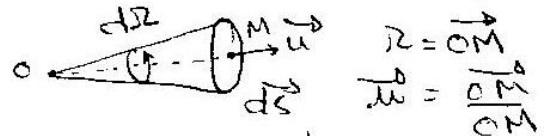
6° notion d'angle Solide

a) Angle Solide élémentaire

Soit O un point de l'espace

dS est une surface élémentaire quelconque
l'angle solide élémentaire $d\Omega$ sous lequel on voit la petite surface dS à partir du point O est défini par

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$



l'angle solide élémentaire $d\Omega$ représente le cône fermé par dS

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

La circulation

la circulation du vecteur $\vec{q}$ est le long du contour (C) par le scalaire $\oint_C \vec{q} \cdot d\vec{l}$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Notion de flux

$$d\Phi = \vec{A}(M) \cdot d\vec{S} \cdot \vec{u}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

