électrostatique

Table des matières

1 charge électrique

1.1 définition et propriétés

Les expériences d'électrisation, par frottement, par contact ou par influence, sont connues depuis l'Antiquité, notamment grâce à l'étude de l'ambre ("elektron" en grec). Au niveau microscopique, la charge électrique est une caractéristique que l'on peut attribuer à toute particule élémentaire qui participe à l'interaction électromagnétique.

- Il existe deux types de charges électriques : positives et négatives, les interactions électriques pouvant être attractives ou répulsives.
- La charge électrique d'une espèce chimique observable à l'état libre est quantifiée : $\boxed{q = ne}$ avec n $\in \mathbf{Z}$ et e = $1{,}6.10^{-19}$C. Ceci est prouvé par l'expérience de Millikan (voir exercices de mécanique).
- La charge électrique est invariante par changement de référentiel.
- La charge électrique d'un système isolé électriquement se conserve.

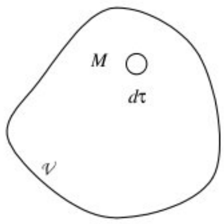
Remarques :
- il existe des particules non chargées.
- A toute particule chargée, correspond une antiparticule de charge opposée.
- Les quarks ont une charge inférieure à e en valeur absolue, mais ils ne sont pas observables isolément.

1.2 description de la charge électrique à l'échelle macroscopique

Attribuer une charge électrique à chaque atome (ou ion) alors que l'on s'intéresse à une quantité de matière d'ordre macroscopique, revient à envisager une fonction de répartition de la charge électrique qui est nulle pratiquement en tout point de l'espace, sauf en un nombre fini (néanmoins extrêmement important) de points, pour lesquels elle est multiple de e.
Cette fonction présente donc un nombre considérable de discontinuités. Le problème est exactement le même concernant la description de la masse vue en thermodynamique : celle-ci est répartie de façon discrète au niveau microscopique, mais nous avons l'impression d'une répartition continue (ou en tout cas présentant un nombre limité de discontinuités) au niveau macroscopique. Il est donc impossible à traiter tel quel mathématiquement.
Si on considère un volume V contenant une charge totale q, on ne peut se contenter de dire qu'il contient une charge q/V par unité de volume : la charge n'est pas nécessairement répartie uniformément.

1.2.1 densité volumique de charges

Il faut donc envisager de subdiviser l'espace en volumes élémentaires dτ (échelle mésoscopique), petits à l'échelle macroscopique mais grands par rapport au volume d'une charge élémentaire, donc contenant un grand nombre d'entités chargées.



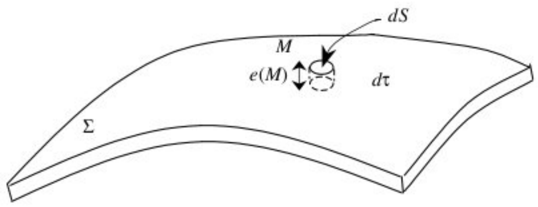
Si $dq = \sum q_i$ est la charge contenue dans le volume $d\tau$ autour du point M, on peut alors écrire

$$\boxed{dq = \rho(M) d\tau}$$

$\rho(M) = \dfrac{dq}{d\tau}$ est la densité volumique de charge au voisinage de M, exprimée en C.m^{-3}.

Remarque : Plus dτ sera petit devant les dimensions du système, meilleure sera la précision. En revanche, il faut que dτ reste grand devant les dimensions microscopiques afin de ne pas laisser apparaître l'aspect discret de la répartition de la matière.

1.2.2 densité surfacique de charges



La répartition de matière peut être telle que l'une des dimensions soit négligeable devant les deux autres. La charge dq portée par le volume mésoscopique dτ situé autour du point M peut toujours s'écrire : $dq = \rho(M)d\tau$. Par ailleurs, dτ = e(M)dS où e(M) est l'épaisseur du volume au voisinage de M et dS sa section. On a alors $dq = \rho(M)d\tau = \rho(M)e(M)dS$. Quand $e(M)$ tend vers 0, le produit $\rho(M)e(M)$ reste non nul.

$$\boxed{dq = \rho(M)\, edS = \sigma(M)dS}$$

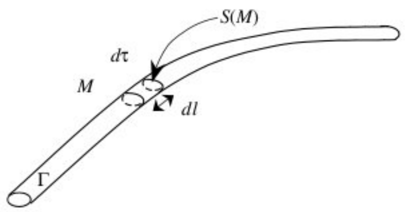
$\sigma(M)$ est la densité surfacique de charge au point M, exprimée en C.m^{-2}.

1.2.3 densité linéique de charges

Si deux des 3 dimensions sont négligeables par rapport à la troisième, on peut définir comme précédemment une **densité linéique de charge** ou **charge linéique**

$$\boxed{dq = \lambda(M)dl}$$

avec $\lambda = \rho(M)dS$, densité linéique de charge, exprimée en C.m^{-1}.

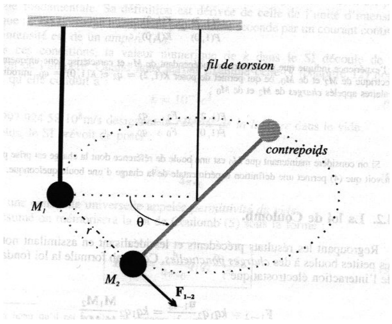


Remarque : la modélisation par une distribution volumique est toujours valable, au contraire des disributions surfaciques et linéiques.

2 champ électrostatique

2.1 loi de Coulomb

S'inspirant de la loi de la gravitation énoncée par Newton, Coulomb monte une expérience utilisant une balance de torsion qu'il a préalablement étudiée pour mesurer de façon très sensible la force d'interaction entre deux conducteurs chargés.



Un conducteur est solidaire d'une tige horizontale suspendue à un fil métallique fixé à son extrémité supérieure. On introduit un deuxième conducteur à l'intérieur de la balance. Les deux conducteurs initialement en contact sont électrisé par contact avec un troisième.
Ils acquièrent des charges de même signe et se repoussent. La force exercée par 1 sur 2 est donc dirigée suivant M_1M_2 et de M_1 vers M_2.
Pour réduire la distance entre les deux conducteurs, il faut exercer une certaine torsion sur le fil. L'angle de torsion du fil est proportionnel à la force entre les deux charges et on constate expérimentalement qu'il est inversement proportionnel au carré de la distance séparant les deux charges.
L'expression actuelle de la loi de Coulomb est la suivante :

Soient deux charges ponctuelles q$_1$ et q$_2$, respectivement situées en deux points M$_1$ et M$_2$; la force exercée par M$_1$ sur M$_2$ dans le vide s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1{M_2}^2}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}}$$

avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\,SI$ **permittivité diélectrique du vide.**

Remarque 1 : Dans un milieu isolant (diélectrique) caractérisé par sa permittivité relative ε_r, elle devient : $\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{q_1q_2}{M_1{M_2}^2}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$. Ainsi, pour l'eau $\varepsilon_r \approx 80$ car les charges électriques sont écrantés par les molécules d'eau qui solvatent l'entité chargée. C'est ce qui confère à l'eau son carctère dissociant.

Remarque 2 : Cette expression n'est valable que dans le cadre de l'électrostatique, c'est-à-dire pour deux charges fixes dans le référentiel d'étude. (Sinon, il faut travailler avec des forces électromagnétiques. Cela reste néanmoins une bonne approximation si les vitesses des particules sont faibles devant c.)

Remarque 3 : L'intensité des forces électrostatiques explique la neutralité de la matière.

2.2 champ créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q en O exerce sur une charge ponctuelle q' placée en un point M une force

$$\overrightarrow{F}_{q\to q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{OM^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = q'\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Le rapport $\frac{\overrightarrow{F}}{q'}$ est indépendant de la charge q'. Il ne dépend que de q et des coordonnées du point M. On peut donc considérer que la présence de la charge q au point O modifie les propriétés de l'espace autour d'elle. La charge q crée un champ électrostatique, exprimé en

V.m^{-1}

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}}$$

Une charge ponctuelle q' placée en un point M subira une force électrostatique $\overrightarrow{F} = q'\overrightarrow{E}(M)$ de la part de q.

- Le champ $\overrightarrow{E}$ n'est pas défini au point où se trouve la charge.
- Il présente une symétrie sphérique.
- ordres de grandeur : champ disruptif de l'air (provoquant l'ionisation de ses molécules) : 3.10^6 V/m ; champ intraatomique : de l'ordre de 10^{10} V/m (obtenu à partir du potentiel d'ionisation de l'atome).

2.3 champ créé par une distribution de charges ponctuelles

Soit une distribution de n charges ponctuelles q$_i$ placées aux points M$_i$. Un charge ponctuelle q' subit de la part de la distribution une force électrique égale à la somme des forces dues à chacune des composantes de la distribution, soit :

$$\overrightarrow{F} = q'\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{E}_i(M)$$

La distribution crée donc en un point M de l'espace un champ électrostatique $\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{E}_i(M)}$.

On observe donc que le champ résultant de la distribution est la somme des champs créés par chacune de ces composantes. Ce résultat constitue le **théorème de superposition** pour le champ électrique. Nous admettrons qu'il se généralise à une distribution quelconque de charges.

Remarque : ce théorème suppose la linéarité des effets électriques, qui est vérifiée expérimentalement mais non démontrée.

<u>exemple : champ créé par deux charges identiques</u>

Soient deux charges Q fixées aux points M$_1$(-a,0,0) et M$_2$(+a,0,0). On place une troisième charge q ***de même signe*** *et de masse m en O(0,0,0) et on souhaite étudier la stabilité de cette position d'équilibre.*

<u>Système :</u> charge q
<u>Référentiel :</u> terrestre, supposé galiléen
- Le champ créé en O par les deux charges Q est nul puisque les contributions des deux charges se compensent. O est donc bien une position d'équilibre.
- Supposons que la charge q soit écartée légèrement de O suivant l'axe (Ox). D'après le PFD, $m\overrightarrow{a} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(a-x)^2})\overrightarrow{e_x}$.

En projection suivant $\overrightarrow{e_x}$, $m\ddot{x} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}((1-2\frac{x}{a}) - (1+2\frac{x}{a}) + o(\frac{x}{a}))$

$$\ddot{x} + \frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 a^3}x = 0$$

L'équilibre est donc stable : la charge q effectue de petites oscillations autour de O.

- Supposons que la charge q soit écartée légèrement de O suivant l'axe (Oy). D'après le PFD, $m\overrightarrow{a} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{y\overrightarrow{e_y}+a\overrightarrow{e_x}}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y\overrightarrow{e_y}-a\overrightarrow{e_x}}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}})$.
En projection suivant $\overrightarrow{e_y}$, $m\ddot{y} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{a^3}+o(\frac{y}{a^3})$

$$\ddot{y} - \frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 a^3}y = 0$$

L'équilibre est donc instable suivant (Oy) et a fortiori globalement (la probabilité pour que le charge soit exactement suivant (Ox) est nulle).

2.4 champ créé par une distribution "continue" de charges

Soit une distribution volumique de charge dans un volume V, caractérisée par une densité volumique de charge ρ(M), M $\in$ V. L'élément de volume dτ en M porte une charge (quasi-ponctuelle) $\rho(M)d\tau$ et crée en P un champ élémentaire d$\overrightarrow{E}_M$(P) $=\frac{\rho(M)d\tau}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{MP}}{MP^3}$. En utilisant le théorème de superposition du champ électrique, on en déduit que le champ créé en P par l'ensemble de la distribution a pour expression :

$$\overrightarrow{E}(M) = \int\int\int_V \frac{\rho(M)d\tau}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

exercice 4

2.5 Lignes de champ

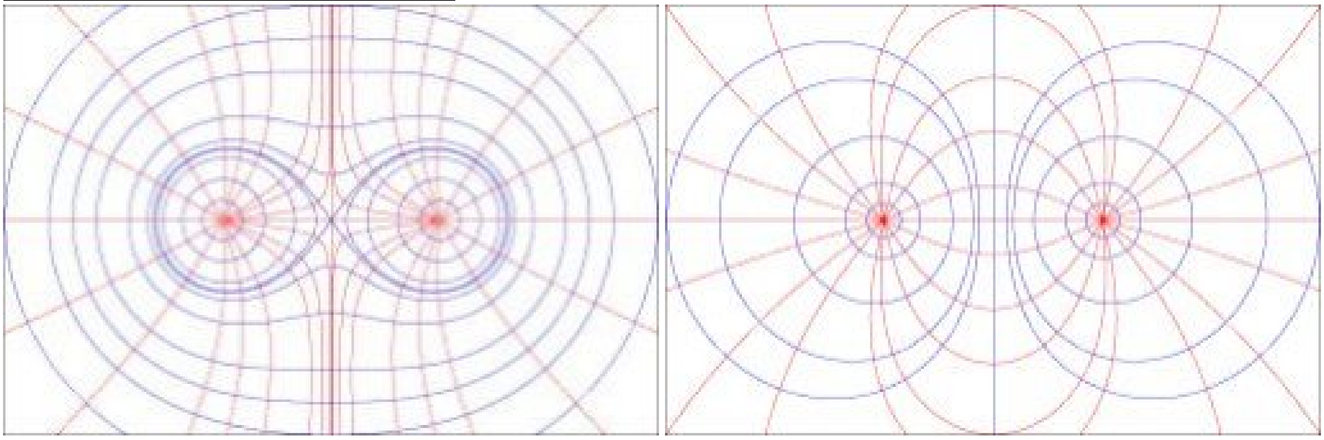
Une **ligne de champ** est tangente en chacun de ses points M au champ $\overrightarrow{E}(M)$ et orientée dans le sens du champ.

Son équation est $\boxed{d\overrightarrow{M}\wedge\overrightarrow{E}=\overrightarrow{0}}$.
En coordonnées cartésiennes, cette relation s'écrit $\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}$.
En coordonnées cylindriques, cette relation s'écrit $\frac{d\rho}{E_\rho}=\frac{\rho d\varphi}{E_\varphi}=\frac{dz}{E_z}$.
En coordonnées cylindriques, cette relation s'écrit $\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}=\frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$.

Elle vérifie les propriétés suivantes :
1. Les lignes de champ électrostatique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.
2. Lorsqu'il est défini, le champ électrostatique est nul au point d'intersection de deux lignes de champ (deux lignes de champ ne peuvent donc se couper que si $\overrightarrow{E}(M)=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{E}(M)$ est non défini, donc s'il y a une charge ponctuelle, une surface ou une ligne chargée en M).
3. Les lignes de champ électrostatique d'une distribution
   - partent à l'infini si la distribution est globalement positive
   - proviennent de l'infini si la distribution est globalement négative
   - n'aboutissent ni ne proviennent de l'infini si la distribution est globalement neutre

On peut observer la topographie d'un champ électrique en soumettant des grains de riz en suspension dans la glycérine au champ électrique souhaité : les grains de riz se polarisent sous l'action du champ électrique et s'orientent alors parallèlement à celui-ci, matérialisant ainsi les lignes de champ.

Observation d'une carte de champ :



- On constate que les symétries et invariances de la distribution de charges se retrouvent dans les lignes de champ (ici, invariance par rotation autour de l'axe portant les deux charges et symétrie ou antisymétrie par rapport au plan médiateur des charges). On peut donc simplifier les calculs du champ électrostatique grâce à ses propriétés de symétrie.
- A grande distance de la distribution, les lignes de champ se rapprochent de celles du champ créé par une seule charge, équivalente à la charge globale
- A proximité de chaque charge, la situation tend vers celle correspondant à cette charge seule.
- Aucune ligne de champ électrostatique n'est une courbe fermée. exercice 5

3 Invariances et symétries

3.1 Invariances des distributions de charges

• Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe Δ, est **invariante par translation** suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M', sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.
exemple : distribution invariante par translation suivant Oz, comme un fil de section rectangulaire infini d'axe Oz

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta)$$

• Une distribution, est **invariante par rotation** autour d'un axe Δ si, pour tout point M et M' obtenu après rotation, sa densité de charge vérifie $\rho(M) = \rho(M')$.
exemple : distribution invariante par rotation autour d'un axe Oz

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$

• Une distribution à **symétrie cylindrique** est telle que

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de Oz et invariance par translation suivant Oz, comme pour un fil cylindrique infini d'axe Oz)

•Une distribution à **symétrie sphérique** est telle que

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de $\vec{e}_\varphi$ et invariance par rotation autour de Oz)

3.2 Plan de symétrie et plan d'antisymétrie

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, pour tout point M, il existe un symétrique M', et si sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = \rho(M')$$

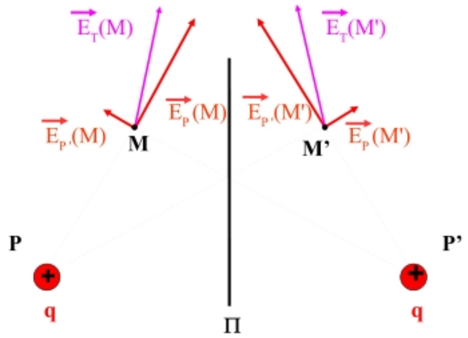
Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, pour tout point M, il existe un symétrique M', et si sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = -\rho(M')$$

exercice 1

3.3 Conséquences pour le champ électrostatique

D'après le principe de Curie, lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets.
- Lorsqu'une distribution de charges présente un plan de symétrie Π, $\vec{E}$ est transformé en son symétrique par rapport au plan Π.

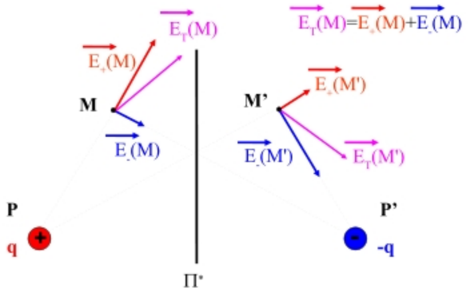


$$\vec{E}(P_2) = sym\,\vec{E}(P_1)$$

Conséquence :

$$\boxed{\vec{E}(M \in \Pi) \in \Pi}$$

- D'autre part, lorsqu'une distribution de charges présente un plan d'antisymétrie Π^* est transformé en son antisymétrique par rapport au plan Π^*.
On dit que le champ électrique est un vecteur polaire ou vecteur vrai, c'est-à-dire qu'il présente les mêmes éléments de symétrie que la distribution qui le crée.



$$\vec{E}(P_2) = -sym\,\vec{E}(P_1)$$

Conséquence :

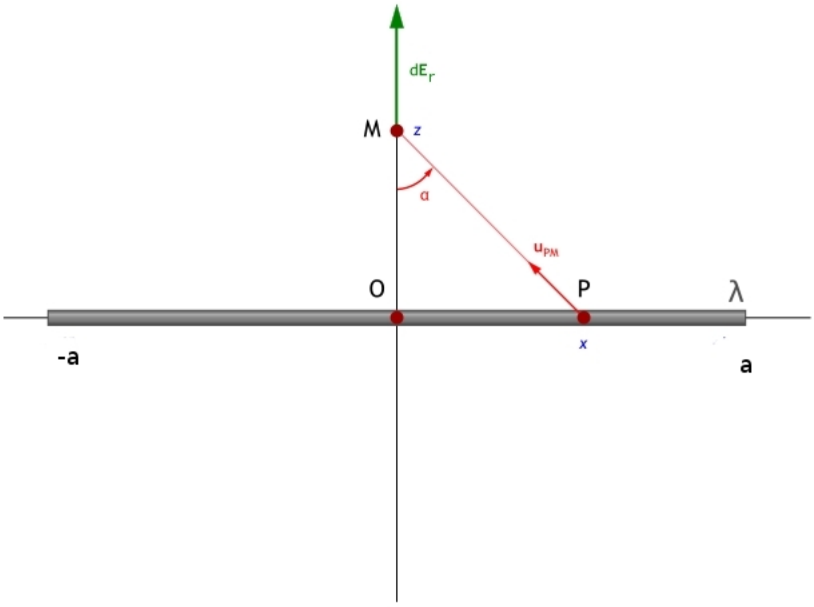
$$\boxed{\overrightarrow{E}(M \in \Pi^*) \perp \Pi^*}$$

exercice 7

3.4 exemples de calculs de champ

3.4.1 champ dans le plan médiateur d'un segment uniformément chargé

Soit un segment uniformément chargé, entre les points (-a,0,0) et (a,0,0), de charge linéique λ. On souhaite calculer le champ électrique créé en un point M de son plan médiateur (Oyz).



Soit M le point considéré, défini par les coordonnées cylindriques d'axe (Ox) (r,θ,0).

- Le plan défini par M et l'axe Ox est un plan de symétrie pour la distribution, de même que le plan (Oyz). Le champ en M est donc nécessairement dirigé suivant le vecteur $\overrightarrow{e_r}$.
- Il suffit donc de calculer E$_r$ = $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \lambda dx . \dfrac{r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$E_r = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \lambda dx \frac{r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Soit α l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$ où A est un point du segment chargé.
$x = r \tan \alpha$ donc dx = r $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$.

$$E_r = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_{max}} \lambda . \frac{r^2 \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}}{r^3 \dfrac{1}{\cos^3 \alpha}} d\alpha$$

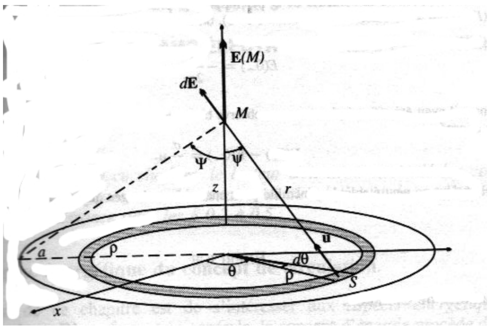
$$E_r = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\alpha_{max}} \lambda . \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha$$

$$E_r = 2\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} [\sin \alpha]_o^{\alpha_{max}}$$

$$\boxed{E_r = 2\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{a}{(r^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}}$$

Remarque : si le fil est infini, $a \longrightarrow \infty$ et $E_r \longrightarrow \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$
Remarque 2 : le champ n'est pas défini par cette expression en r=0, point de la distribution linéique.

3.4.2 champ sur l'axe d'un disque uniformément chargé



Soit M un point de l'axe (Oz). Les plans contenant (Oz) sont des plans médiateurs pour la distribution de charges donc $\overrightarrow{E}(M)$ est nécessairement suivant $\overrightarrow{e_z}$.

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho d\theta d\rho\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\rho d\rho\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}]_0^R$$

$$\boxed{E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\text{sgn}(z)(1-\frac{|z|}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}})}$$

Remarque : à la traversée de la surface contenant le disque chargé, la composante normale du champ électrique est discontinue.

$$\boxed{\overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{21}}}$$

Ce résultat se généralise à toute surface chargée.

Remarque 2 : le champ n'est pas défini par cette expression en un point de la distribution surfacique.

4 aspects énergétiques : circulation du champ électrostatique, potentiel électrostatique

4.1 circulation d'un champ de vecteurs

La force exercée par une charge ponctuelle q en O sur la charge q' en M s'écrit

$$\overrightarrow{F} = q'\,\overrightarrow{E}(M)$$

Le travail de $\overrightarrow{F}$ sur un déplacement quelconque, **en régime permanent**, entre M_1 et M_2 est

$$W_{M_1M_2}(\overrightarrow{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM} = q' \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{E(M)}.\overrightarrow{dOM}$$

Il est donc proportionnel à la circulation de $\overrightarrow{E}$ sur la portion de trajectoire considérée.

> Par définition, **on appelle circulation élémentaire d'un champ de vecteurs** $\overrightarrow{A}(M)$ le produit scalaire dC = $\overrightarrow{A}(M).d\overrightarrow{l}(M) = \overrightarrow{A}(M).\overrightarrow{dOM}$.
> Soit une courbe orientée Γ, A et B deux points de Γ, on appelle circulation du champ de vecteurs de A à B sur Γ, l'intégrale $C_{A\to B}(A,\Gamma) = \int_{A,M\in\Gamma}^{B} \overrightarrow{A}(M).d\overrightarrow{l}(M)$, l'orientation de $d\overrightarrow{l}(M)$ étant donnée par celle de Γ.

4.2 circulation du champ électrostatique

Dans le cas du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle, en coordonnées sphériques,

$$\int_A^B \overrightarrow{E(M)}.\overrightarrow{dOM} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{e}_r.dr\,\overrightarrow{e}_r = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Remarque : Le principe de superposition permet de généraliser ce résultat à une distribution de charge quelconque.

La circulation de $\overrightarrow{E}$ est conservative, elle ne dépend pas du chemin suivi.

Conséquences :
- Il découle immédiatement de ce qui précède que pour un tel champ de vecteurs, la circulation sur un contour fermé est nulle, pour tout contour fermé de son domaine de définition.
- Nous admettrons que pour un champ à circulation conservative A(M), on peut écrire :

$$\overrightarrow{A}(M) = -gradV(M) \Longleftrightarrow \overrightarrow{A}(M).\overrightarrow{dl} = -dV(M)$$

4.3 potentiel électrostatique

La circulation de $\overrightarrow{E}$ peut donc s'écrire

$$\boxed{\int_A^B \overrightarrow{E(M)}.\overrightarrow{dOM} = V(A) - V(B)}$$

où $V(M)$ est une fonction appelée potentiel électrostatique, exprimée en V.

Remarque : les tensions sont des différences de potentiels électriques.

Dans le cas particulier de la charge ponctuelle

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}}$$

Le potentiel est défini à une constante près (on choisit en général V(∞) = 0, ce qui est possible pour une distribution réelle, d'extension nécessairement finie, mais pas pour une distribution d'extension infinie) et il n'est pas défini au point où se trouve la charge.
Le champ électrostatique est invariant de jauge, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix

de cette constante.

• Pour une distribution de charges discontinues, l'opérateur gradient étant linéaire,

$$V(M) = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{P_i M}$$

• Pour une distribution volumique **d'extension finie**

$$\boxed{V(M) = \int\int\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau}{PM}}$$

V et $\overrightarrow{E}$ sont définis et continus dans tout l'espace.

• Pour une distribution surfacique **d'extension finie**

$$\boxed{V(M) = \int\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS}{PM}}$$

V est défini et continu dans tout l'espace et $\overrightarrow{E}$ est défini dans tout l'espace mais subit une discontinuité à la traversée de la surface de distribution.

• Pour une distribution linéique **d'extension finie**, pour tout point M hors du fil,

$$\boxed{V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{PM}}$$

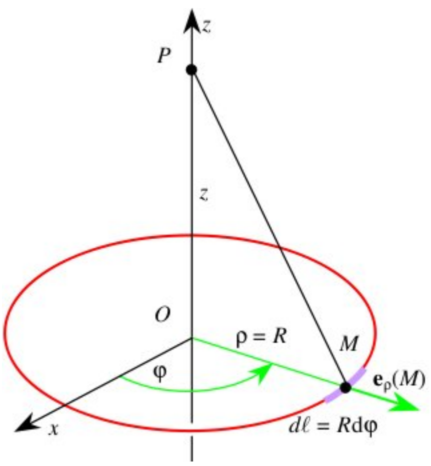
V et $\overrightarrow{E}$ sont non définis sur la distribution.

Connaissant le potentiel, on peut en déduire le champ par

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, V}$$

(Inversement, un champ de vecteur à circulation conservative est un champ de gradient.)
exercices 2, 6, 12

4.4 exemple : potentiel créé par un circonférence uniformément chargée



Soit une circonférence de centre O et de rayon R portant, en tout point, une densité linéique de charge λ. On souhaite connaître le potentiel et le champ électrostatique créé par la distribution en un point P de l'axe (Oz) de la circonférence.

- Pour une telle distribution, le plan de la circonférence est plan de symétrie ainsi que tout plan passant par l'axe Oz. Calculons le champ électrostatique et le potentiel en un point P de l'axe Oz : le champ est porté alors par l'axe Oz.

$$V(M) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\varphi}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Le champ, porté par l'axe (Oz) d'après les considérations de symétrie, en découle facilement :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

donc $E_z = -\dfrac{dV}{dz} = \dfrac{\lambda}{2\epsilon_0} \dfrac{Rz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Remarque : quand z$\longrightarrow \infty$, on retrouve l'expression du champ créé par une charge ponctuelle q=$2\pi\lambda R$ placée en O.

4.5 surfaces équipotentielles

Dans le cas général d'un champ de scalaires quelconque, on appelle surface isoscalaire une surface en tout point de laquelle un champ de scalaires est constant.

Dans le cas où le champ de scalaires est le potentiel dont dérive un champ de vecteurs, les surfaces isoscalaires prennent alors le nom de surfaces équipotentielles. L'équation d'une surface équipotentielle s'obtient en écrivant

$$\boxed{dV = 0}$$

Les constantes d'intégration sont liées au point par lequel passe la surface équipotentielle considérée.

- Imaginons un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ au voisinage d'un point M appartenant à une équipotentielle, tout en restant sur cette équipotentielle,

$$dV = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dOM} = 0$$

$$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{dOM}$$

Les lignes de champ, tangentes aux champ, sont normales aux surfaces équipotentielles.

- $dV < 0 \Rightarrow \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dOM} > 0$
Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.
exercice 3

4.6 propriétés de symétrie

Le potentiel électrostatique respecte les symétries (plans, axes), mais, étant défini à une constante additive près, ne satisfait pas directement aux plans d'antisymétries de la distribution de charges. Cela est néanmoins possible sous réserve d'un choix ad hoc de la constante, qui implique le choix d'une valeur nulle du potentiel en tout point du plan d'antisymétrie.

5 énergie potentielle électrostatique

5.1 énergie potentielle d'une charge placé dans un champ

Reprenons l'expression du travail de la force électrique exercée par une charge ponctuelle q sur une charge ponctuelle q' se déplaçant de A en B suffisamment lentement pour rester dans le cadre de l'électrostatique.

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = q'(V(A) - V(B))$$

Ce travail ne dépend pas de chemin suivi. Il peut être considéré comme la variation d'une fonction d'état E$_P$: $W_{AB}(\overrightarrow{F}) = E_p(A) - E_p(B)$

$$\boxed{E_p(M) = q'V(M)}$$

est l'**énergie potentielle** que possède la charge q' du fait de sa position M dans le champ scalaire V.

5.2 énergie potentielle d'interaction entre deux charges

Si un opérateur cherche à amener de manière quasi-statique deux charges ponctuelles q et q', initialement à l'infini et au repos, à des positions finales M et M' et au repos, il doit fournir un travail :

$$\delta W_{op} = \overrightarrow{f_{op/q}}\overrightarrow{dOM} + \overrightarrow{f_{op/q'}}\overrightarrow{dOM'}$$

Comme le déplacement est quasi-statique, d'après le PFD sur chaque charge,

$$\delta W_{op} = -\overrightarrow{f_{q'/q}}\overrightarrow{dOM} - \overrightarrow{f_{q/q'}}\overrightarrow{dOM'}$$

$$\delta W_{op} = -\overrightarrow{f_{q/q'}}\overrightarrow{dMM'}$$

$$\delta W_{op} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} d(\frac{1}{MM'})$$

$$W_{op} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \Delta(\frac{1}{MM'})$$

L'**énergie potentielle d'interaction** entre deux charges q_1 et q_2 est égale à

$$\boxed{E_{p_{12}} = q_1V_2(M_1) = q_2V_1(M_2) = \frac{1}{2}\left(q_1V_2(M_1) + q_2V_1(M_2)\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1M_2}}$$

6 flux du champ électrostatique, théorème de Gauss

Dans certains cas, le calcul du champ électrostatique peut être beaucoup plus facile en utilisant les propriétés du flux d'un champ newtonien.

6.1 vecteur élément de surface

Une surface élémentaire quasi-plane dS autour d'un point M possède deux faces. Pour distinguer ces deux faces, il est nécessaire d'orienter la surface. Pour cela, on associe à cet élément de surface un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}(M)$, normal à la surface. Pour une surface fermée, il est toujours dirigé vers l'extérieur de la surface.
On appelle vecteur élément de surface le vecteur $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{n}(M).dS$

6.2 flux d'un champ de vecteur

Par définition, on appelle flux élémentaire d'un champ de vecteurs $\vec{A}$(M) au point M la quantité dΦ = $\vec{A}(M).d\vec{S}$.
Le flux du champ $\vec{A}$(M) à travers une surface Σ est donc $\Phi(\vec{A},\Sigma) = \int\int_{M\in\Sigma} \vec{A}(M).d\vec{S}$.
Si la surface est fermée, on écrit $\Phi(\vec{A},\Sigma) = \oint_{M\in\Sigma} \vec{A}(M).d\vec{S}$.

6.3 flux du champ électrostatique

Calculons le flux sortant d'une surface sphérique de rayon r enfermant une charge ponctuelle q en O :

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{n}_{ext}\,dS = \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r.\vec{e}_r\,dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On admettra le théorème de Gauss, qui généralise ce résultat :
Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est égal à la charge totale Q_{int} enfermée dans cette surface divisée par ϵ_0

$$\boxed{\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{n}_{ext}dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

Conséquence : extrema du potentiel électrostatique
Imaginons qu'en un point M de l'espace, le potentiel prenne une valeur maximale. Les lignes de champ étant orientées dans le sens des potentiels décroissants, elles divergent à partir de ce point.
Soit une surface fermée Σ, telle que M lui soit intérieur : les lignes de champ divergeant à partir de M, le flux du champ électrique tend nécessairement vers une valeur strictement positive si l'on fait tendre Σ vers M. D'après le théorème de Gauss, il existe nécessairement une charge positive ponctuelle en M.
On montrerait de la même façon qu'en un point où le potentiel prend une valeur minimale, il existe une charge ponctuelle négative.

Il n'y a pas d'extremum du potentiel électrostatique dans une région vide de charge.

exercices 8, 9, 10, 11

6.4 applications : calculs de champs et de potentiels

6.4.1 boule uniformément chargée

On considère une sphère de rayon R et de centre O, à l'intérieur de laquelle existe une densité volumique uniforme de charge ρ. Cette distribution obéit évidemment à une symétrie sphérique, donc le champ est radial et ne dépend que de la distance r du point M où on le calcule, à O. La surface de Gauss est donc la sphère de centre O passant par P, donc de rayon r.
Le flux du champ à travers cette surface est donné par :

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{n}_{ext}dS = \oint_{\mathcal{S}} E_r\,\vec{e}_r.\vec{e}_r\,dS = 4\pi r^2 E_r$$

D'après le théorème de Gauss, $\Phi = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ si r > R
et $\Phi = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ si r < R.
D'où $\boxed{E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$ si r > R

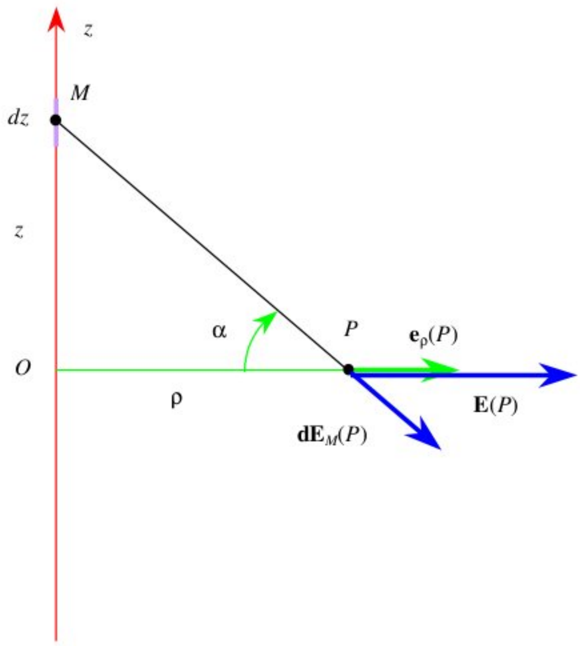
et $\boxed{E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$ si r < R.

$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + Cte$ si r > R et $V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + Cte'$ si r < R.
En choisissant V= 0 à l'infini, cte=0 et le potentiel ne présentant pas de discontinuité (le champ étant défini en tout point de l'espace, cela nécessite que le potentiel soit (au moins !) continu),

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - \frac{r^2}{3})} \text{ si r<R}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}} \text{ si r>R}$$

6.4.2 fil infini uniformément chargé



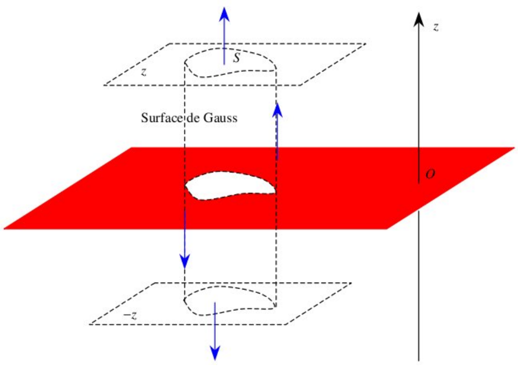
- Une telle distribution est à la fois invariante par translation le long du fil et par rotation autour du fil. Le champ et le potentiel en un point P quelconque ne dépendent donc que de la distance de ce point au fil, que l'on notera ρ.
- Par ailleurs, les plans passant par P et respectivement perpendiculaire au fil et passant par le fil sont tous deux plans de symétrie, le champ est donc colinéaire à leur intersection, c'est-à-dire suivant la droite passant par P et perpendiculaire au fil. On choisit l'origine du fil coïncidant avec le projeté orthogonal de P, étant donnée l'invariance par translation.
- On choisit comme surface de Gauss le cylindre d'axe Oz, de hauteur h et passant par P.

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}_{ext} dS = 2\pi\rho h E(\rho) + 0$$

D'après le théorème de Gauss, $\Phi = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ donc $\boxed{E_\rho(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}}$ et $\boxed{V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{\rho}{\rho_0}}$
où ρ_0 est une distance particulière pour laquelle on choisit arbitrairement de prendre le potentiel nul.

- *Remarques :* dans ce cas, on ne pourrait pas calculer le potentiel par intégration directe, car la distribution n'est pas d'extension finie. par ailleurs, le potentiel et le champ électrostatique ne sont pas définis sur le fil.

6.4.3 plan infini uniformément chargé



Soit le plan (Oxy) uniformément chargé, de charge surfacique σ. Calculons le champ créé par ce plan en un point M(x,y,z > 0).

- Tous les plans contenant l'axe (Mz) sont des plans de symétrie pour la distribution. Le champ électrostatique est donc dirigé suivant l'axe (Oz).
- Par ailleurs, la distribution étant invariante par translation suivant (Ox) et (Oy), E_z(x,y,z)=E_z(z).
- La distribution est aussi symétrique par rapport à (Oxy) donc E_z(-z)=-E_z(z).

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre d'axe (Oz), de hauteur 2z, de rayon R, symétrique par rapport à (Oxy) :

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}_{ext} dS = \pi R^2 E_z(z) - \pi R^2 E_z(-z) + 0 = 2\pi R^2 E_z(z)$$

D'après le théorème de Gauss, $\Phi = \dfrac{\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$ donc $E_z = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ pour z > 0.

$$\boxed{E_z = \mathrm{sgn(z)} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

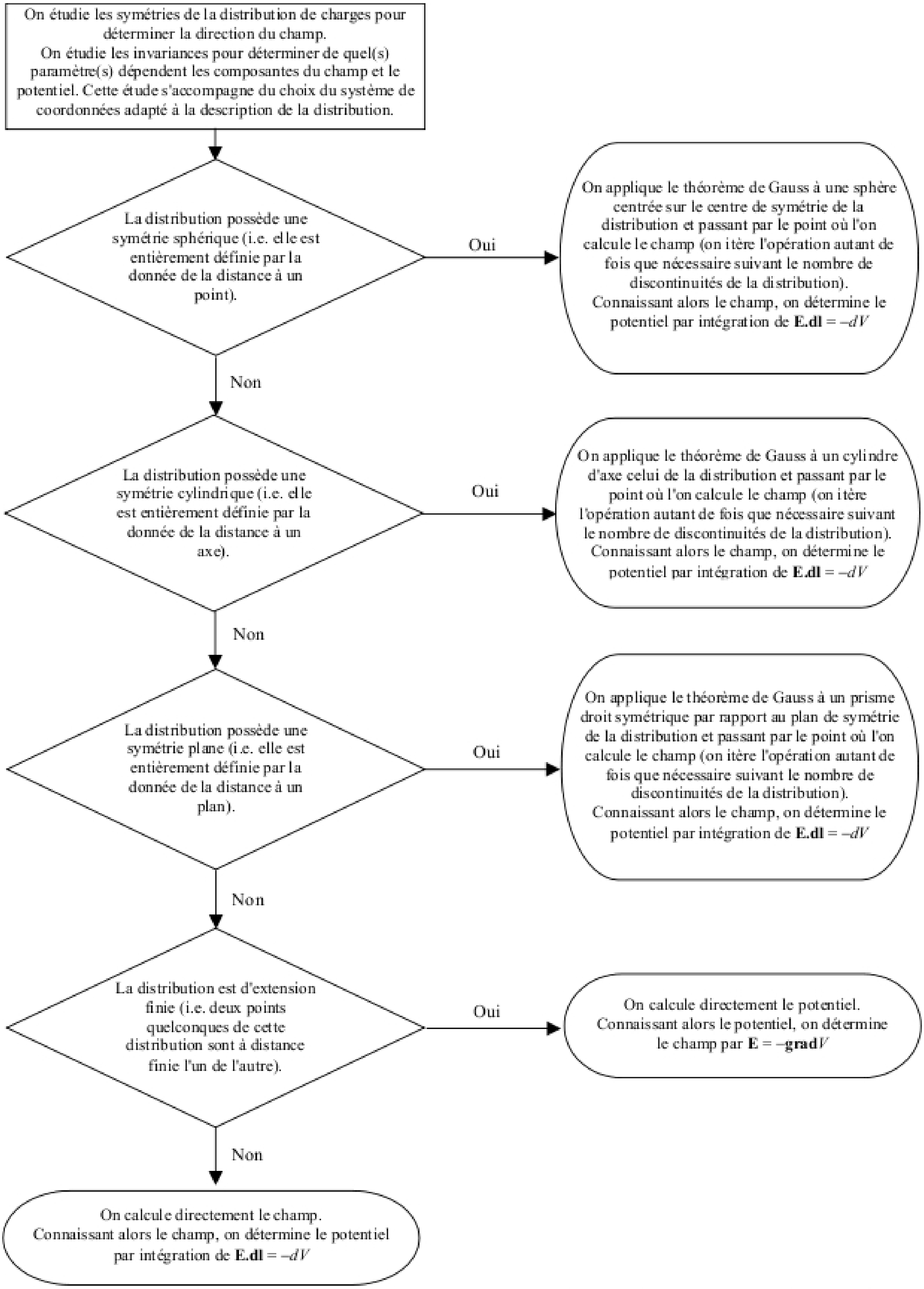
Comme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad} V$, $E_z = -\dfrac{dV}{dz}$

$$\boxed{V(M) = \frac{\sigma |z|}{2\varepsilon_0} + Cte}$$

Remarque : on retrouve bien l'expression obtenue dans le cas du disque uniformément chargé, en faisant tendre son rayon vers l'infini.
*Remarque 2 :*on retrouve la discontinuité du champ à la traversée d'une surface chargé. Le potentiel est par contre continu.

6.4.4 récapitulatif

Pour choisir la méthode la mieux appropriée au calcul d'un champ électrostatique, on peut suivre l'organigramme suivant :


On étudie les symétries de la distribution de charges pour déterminer la direction du champ. On étudie les invariances pour déterminer de quel(s) paramètre(s) dépendent les composantes du champ et le potentiel. Cette étude s'accompagne du choix du système de coordonnées adapté à la description de la distribution.
La distribution possède une symétrie sphérique (i.e. elle est entièrement définie par la donnée de la distance à un point).
Oui
On applique le théorème de Gauss à une sphère centrée sur le centre de symétrie de la distribution et passant par le point où l'on calcule le champ (on itère l'opération autant de fois que nécessaire suivant le nombre de discontinuités de la distribution). Connaissant alors le champ, on détermine le potentiel par intégration de $\mathbf{E.dl} = -dV$
Non
La distribution possède une symétrie cylindrique (i.e. elle est entièrement définie par la donnée de la distance à un axe).
Oui
On applique le théorème de Gauss à un cylindre d'axe celui de la distribution et passant par le point où l'on calcule le champ (on itère l'opération autant de fois que nécessaire suivant le nombre de discontinuités de la distribution). Connaissant alors le champ, on détermine le potentiel par intégration de $\mathbf{E.dl} = -dV$
Non
La distribution possède une symétrie plane (i.e. elle est entièrement définie par la donnée de la distance à un plan).
Oui
On applique le théorème de Gauss à un prisme droit symétrique par rapport au plan de symétrie de la distribution et passant par le point où l'on calcule le champ (on itère l'opération autant de fois que nécessaire suivant le nombre de discontinuités de la distribution). Connaissant alors le champ, on détermine le potentiel par intégration de $\mathbf{E.dl} = -dV$
Non
La distribution est d'extension finie (i.e. deux points quelconques de cette distribution sont à distance finie l'un de l'autre).
Oui
On calcule directement le potentiel. Connaissant alors le potentiel, on détermine le champ par $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V$
Non
On calcule directement le champ. Connaissant alors le champ, on détermine le potentiel par intégration de $\mathbf{E.dl} = -dV$

7 analogie avec le champ de gravitation

7.1 l'interaction gravitationnelle

Nous avons déjà vu la loi de Newton en mécanique :
Une masse ponctuelle m_1 en M_1 exerce sur une masse m_2 en M_2 une force gravitationnelle

$$\overrightarrow{F}_{1/2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2^3}\overrightarrow{M_1 M_2}$$

On peut donc facilement obtenir des résultats similaires à ceux du champ électrostatique, en remplaçant $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-\mathcal{G}$ et la charge q par la masse m.

7.2 champ gravitationnel

Le champ gravitationnel créé au point P par une masse ponctuelle m située au point M est donné par :

$$\overrightarrow{G}_M(P) = -\mathcal{G}\frac{m}{MP^3}\overrightarrow{MP}$$

Avec le théorème de superposition, on montre que le champ gravitationnel créé par une distribution de n masses ponctuelles m_i est :

$$\overrightarrow{G}_M(P) = -\mathcal{G}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{M_i P^3}\overrightarrow{M_i P}$$

De même, le champ gravitationnel créé par une distribution continue de masses contenue dans un volume V est

$$\overrightarrow{G}_M(P) = -\int\int\int_{M\in V}\mathcal{G}\frac{\rho(M)}{MP^3}\overrightarrow{MP}d\tau$$

7.3 symétries

Le champ gravitationnel possède les mêmes éléments de symétrie que la distribution de masses qui le crée.

7.4 potentiel, énergie potentielle de pesanteur

Le champ gravitationnel est à circulation conservative. Il dérive donc d'un potentiel de pesanteur :
- pour une masse ponctuelle,

$$V_M(P) = -\mathcal{G}\frac{m}{MP} + cte$$

- pour une distribution continue de masses,

$$V_M(P) = -\mathcal{G}\int\int\int_{M\in V}\frac{\rho(M)d\tau}{MP} + cte$$

7.5 théorème de Gauss

Par analogie avec le théorème de Gauss pour le champ électrostatique,
Le flux du champ gravitationnel sortant d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est égal à la masse totale m_{int} enfermée dans cette surface multipliée par $4\pi\mathcal{G}$

$$\boxed{\Phi = \oint_{\mathcal{S}}\overrightarrow{G}.\overrightarrow{n}_{ext}dS = -4\pi\mathcal{G}m_{int}}$$

7.6 exemple : champ de gravitation créé par une distribution sphérique de masse

Soit une sphère de centre O de masse uniformément répartie en volume, de densité ρ, et de rayon R. Calculons le champ gravitationnel créé en un point M(r,θ,φ) par cette distribution.

- La distribution présente une symétrie sphérique donc $\overrightarrow{G}$ ne dépend que de r.
- Tout plan contenant (OM) est un plan de symétrie pour la distribution donc $\overrightarrow{G} = G(r)\overrightarrow{e}_r$.

Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de rayon r et de centre O :

$$\boxed{\Phi = \oint_S \overrightarrow{G}.\overrightarrow{n}_{ext} dS = -4\pi\mathcal{G}m_{int}}$$

- si r $>$ R ,

$$4\pi r^2 G(r) = 4\pi\mathcal{G}\frac{4\pi}{3}R^3\rho$$

$$\boxed{G(r) = -\mathcal{G}\frac{4\pi R^3\rho}{3r^2}}$$

Tout se passe à l'extérieur de la distribution comme si toute la masse était concentrée au centre de la distribution.
- si r $<$ R ,

$$4\pi r^2 G(r) = 4\pi\mathcal{G}\frac{4\pi}{3}r^3\rho$$

$$\boxed{G(r) = -\mathcal{G}\frac{4\pi r\rho}{3}}$$

7.7 résultats non transposables

- La gravitation est toujours attractive - Il n'y a pas d'équivalent au concept de conducteur/isolant. - Il n'y a pas de concept analogue à celui de dipôle électrostatique.

8 le dipôle électrostatique

8.1 définitions

On appelle dipôle électrostatique un ensemble de deux charges opposées +q et −q disposées en deux points (resp.) P et N de l'espace et examiné à une distance grande devant ses dimensions.

Les dipôles sont souvent rencontrés en chimie : certaines molécules se comportent comme des dipôles du fait de la différence d'électronégativité des atomes qui les constituent, d'autres se polarisent sous l'action d'un champ électrostatique.

On appelle moment dipolaire du dipôle, exprimé en C.m, le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{NP}}$$

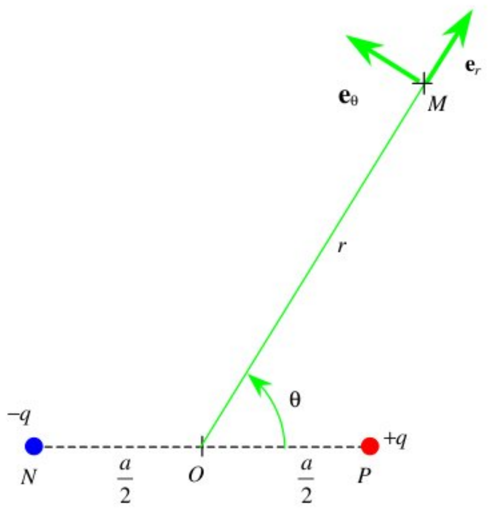
En chimie, on exprime souvent le moment dipolaire en Debye : 1D $=\frac{1}{3}.10^{-29}$C.m.

Nous admettrons que les résultats qui suivent se généralisent à toute distribution dipolaire, c'et-à-dire telle que :

- La charge globale de la distribution est nulle ; on appelle q la somme des charges positives.
- Les barycentres N et P respectivement des charges négatives et positives sont disjoints ; on définit alors le moment dipolaire de la distribution par $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{NP}$.
- L'étude est faite à une distance grande par rapport à celle du dipôle.

exercice 13

8.2 potentiel électrostatique créé par un dipôle



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$$

$$PM^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP})^2 = r^2 - ra\cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2\left(1 - \frac{a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2}\right)$$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

de même,

$$\frac{1}{NM} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{e}_r}{r^2}}$$

Remarque : La distribution est invariante par rotation autour de Oz. Donc, le potentiel en M ne doit pas dépendre de φ. L'expression que l'on vient d'établir permet bien de le vérifier.

8.3 champ électrostatique créé par un dipôle

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

donc

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad E_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

ce qui donne

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \qquad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \qquad E_\varphi = 0}$$

On pourra vérifier

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(\frac{3\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{r}}{r^2}\overrightarrow{r} - \overrightarrow{p}\right)$$

8.4 lignes de champ ; surfaces équipotentielles

- L'équation d'une surface équipotentielle est $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{e}_r}{r^2} = V_0$.

$$\boxed{r^2 = K\cos\theta}$$

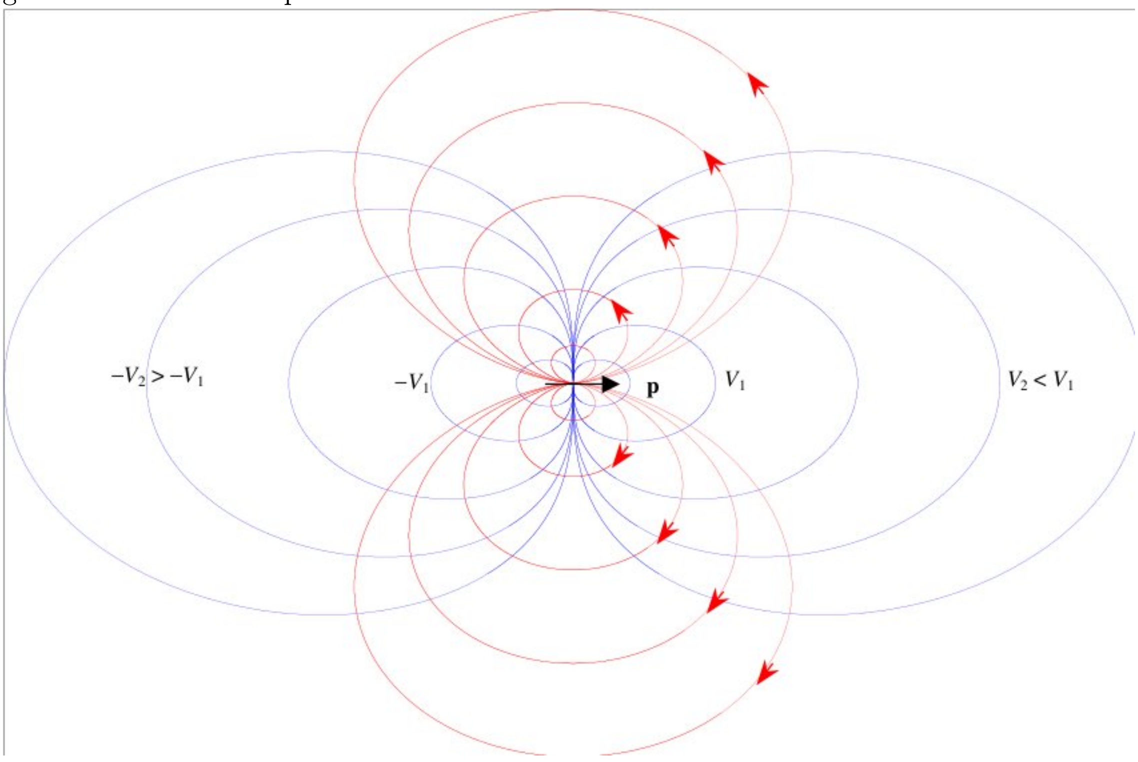
Le champ n'ayant pas de composante suivant $\overrightarrow{e}_\varphi$, les lignes de champ sont contenues dans des plans d'équation $\varphi = cte$.
- L'équation d'une ligne de champ est

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

$$\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{dr}{r}$$

$$\boxed{r = K'\sin^2\theta}$$

Les lignes de champ sont normales aux équipotentielles. Les apparentes contradictions du diagramme obtenu se manifestent toutes au voisinage du point où se trouve le dipôle : les expressions qui ont conduit au tracé ne sont alors plus valables car elles ne le sont qu'à grande distance de ce point.



8.5 action d'un champ électrique sur un dipôle

8.5.1 champ uniforme

Dans ce qui suit, $\overrightarrow{E}_{ext}$ désigne un champ extérieur uniforme dans lequel est plongé le dipôle.

Le dipôle subit alors les actions

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}_{ext} - q\overrightarrow{E}_{ext} = \overrightarrow{0}$$

Le moment en O des forces extérieures est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OP} \wedge q\overrightarrow{E}_{ext} + \overrightarrow{ON} \wedge -q\overrightarrow{E}_{ext} = q\overrightarrow{NP} \wedge \overrightarrow{E}_{ext} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext}$$

Le dipôle ne peut être à l'équilibre que s'il s'aligne avec le champ extérieur.

8.5.2 champ non uniforme

Le calcul précédent du moment résultant en O reste valable :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OP} \wedge q\overrightarrow{E}_{ext} + \overrightarrow{ON} \wedge -q(\overrightarrow{E}_{ext} + d\overrightarrow{E}_{ext}) = q\overrightarrow{NP} \wedge \overrightarrow{E}_{ext} + \overrightarrow{ON} \wedge -q(d\overrightarrow{E}_{ext}) \simeq \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_{ext}$$

car dEext est un infiniment petit du même ordre que NP donc que de ON ; le second terme est donc un infiniment petit du second ordre alors que le premier en est un du premier ordre, il est donc prépondérant.
Le dipôle aura donc tendance à s'orienter comme précédemment dans le sens du champ électrique. La résultante des forces extérieures n'étant pas nulle, il sera ensuite attiré dans la direction dans laquelle l'intensité du champ est la plus forte.
Ce comportement fait penser à celui d'un aimant en présence d'un champ magnétique, par exemple une boussole dans le champ magnétique terrestre.