# SYSTÈMES OPTIQUES CENTRÉS

## 1. Définition

On appelle système *optique centré*, une succession de milieux transparents séparés par des surfaces réfringentes et réfléchissantes. L'image formée par l'une de ces surfaces constitue un objet pour la surface suivante et ainsi de suite. L'axe principal est l'axe de toutes les surfaces. Si le système ne contient que des dioptres, il est dit *dioptrique* ; s'il contient des dioptres et des miroirs, il est dit *catadioptrique*.

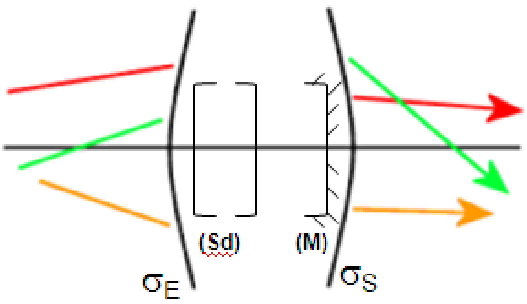



***Figure III-1***

Il est facile de vérifier qu'un système centré ne peut satisfaire aux conditions de stigmatisme rigoureux. Aussi, ces systèmes sont utilisés dans les conditions du stigmatisme approché, c'est-à-dire dans les conditions de Gauss.

## 2. Foyers et plans focaux

### 2.1. Foyers principaux

La définition des foyers principaux est la même que pour les systèmes optiques simples.

i. Tout rayon incident parallèle à l'axe, émerge du système en passant, réellement ou virtuellement, par le foyer image F'.

ii. Tout rayon incident passant, réellement ou virtuellement, par le foyer objet F, émerge parallèlement à l'axe.

### 2.2. Plans focaux

Les plans de front de F et F' sont appelés respectivement plan focal objet et plan focal image. De la position des foyers résulte une distinction entre les systèmes centrés :

- si F et F' sont à distances finies, le système est dit à *foyers* ;

- si F et F' sont rejetés à l'infini, le système est dit *afocal*.

## 3. Systèmes dioptriques à foyers

### 3.1. Plans et points principaux

Le *plan principal image* (PPI), P', est, dans l'approximation de Gauss, le lieu des points d'intersection des rayons incidents parallèles à l'axe avec les émergents correspondants passant par F'. Le point d'intersection H' de P' avec l'axe est appelé *point principal image*.

Le *plan principal objet* (PPO), P, est le lieu des points d'intersection des rayons incidents passant par F avec les émergents correspondants parallèles à l'axe. L'intersection H de P avec l'axe est appelée *point principal objet*.

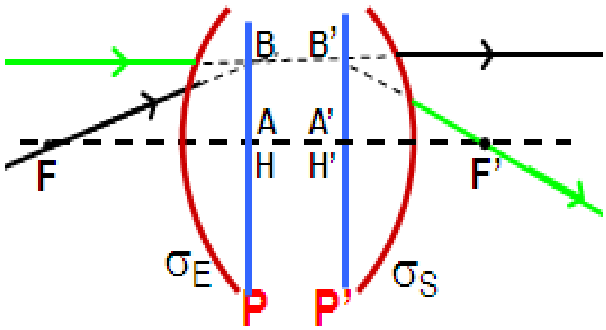



***Figure III-2***

Les plans principaux sont conjugués l'un de l'autre. Le grandissement transversal correspondant est :

$$\gamma = \frac{\overline{H'B'}}{\overline{HB}} = +1$$

### 3.2. Distances focales

Par définition, les distances focales, respectivement objet et image, d'un système centré sont les grandeurs algébriques suivantes :

$$f = \overline{HF} \quad \text{et} \quad f' = \overline{H'F'}$$

On montre que (***Figure III-3***) les distances focales f et f' sont toujours de signes contraires et que:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Avec n et n′ sont les indices des milieux extrêmes.

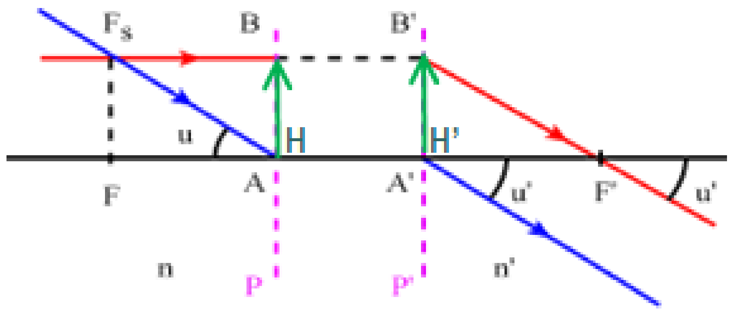



***Figure III-3***

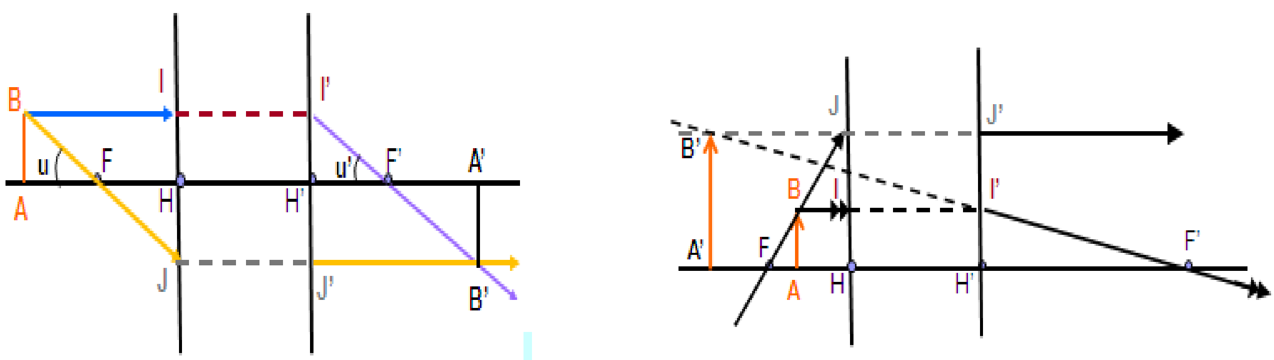
On appelle vergence ou convergence d'un système centré dioptrique à foyers, la quantité algébrique :

$$C = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

f et f' étant exprimées en mètre et C en dioptrie ($m^{-1}$).

### 3.3. Construction d'images

Les règles de construction des images sont les mêmes que pour un système optique simple.




(a) Objet réel, image réelle **(b)** objet réel, image virtuelle

***Figure III-4***

## 4. Points nodaux

Ce sont deux points conjugués situés sur l'axe, N et N', tels qu'à tout rayon incident passant par N correspond un rayon émergent passant par N' et parallèle à l'incident.

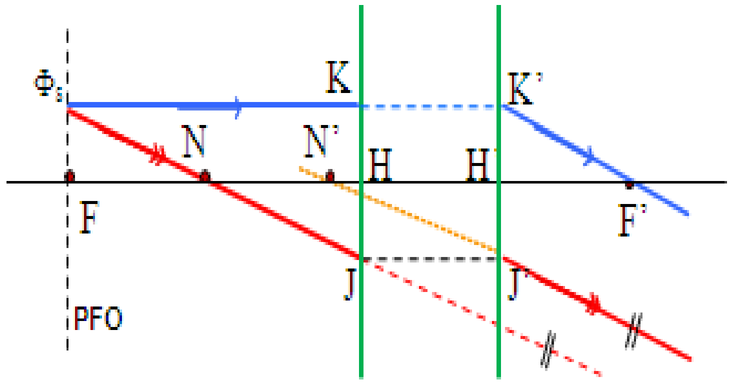



***Figure III-5***

Autrement dit, c'est un couple de points conjugués tel que le grandissement angulaire est G = +1.

## 5. Formules des systèmes centrés

### 5.1. Origine aux points principaux

On montre que :

$$\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = C = \frac{n'}{f'} \quad , \quad \gamma = \frac{n}{n'}\frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$$

Où n est l'indice de réfraction du milieu d'entré et n' celui du milieu de sortie.

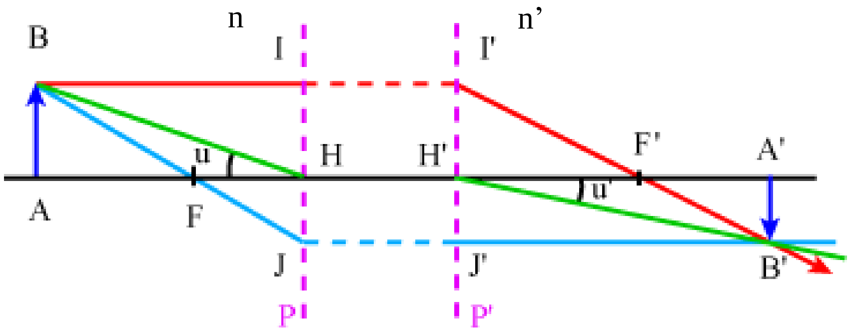



***Figure III-6***

### 5.2. Origine aux foyers

Les formules de Newton s'écrivent :

$$\overline{\mathrm{FA}}\,\overline{\mathrm{F'A'}} = \mathrm{f\,f'} \qquad , \qquad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

## 6. Association de deux systèmes centrés

Les instruments d'optique sont en général formés d'un ensemble de systèmes centrés. Nous allons présenter dans ce paragraphe les formules qui régissent cette association. On se limitera à l'étude de l'association de deux systèmes ($S_1$) et ($S_2$). Le système résultant (S) = ($S_1$) + ($S_2$), est défini si l'on connaît les caractéristiques de chacun des systèmes constituants ainsi que la distance e = $\overline{\mathrm{H'}_1\mathrm{H}_2}$ dite *épaisseur du système*.

### 6.1. Construction géométrique

Les règles de construction des images sont là aussi les mêmes que pour un système optique simple. Notons de plus que la connaissance des points principaux et des points nodaux peut faciliter la construction géométrique.

### 6.2. Positions des foyers

En introduisant l'intervalle optique $\Delta = \overline{\mathrm{F}'_1\mathrm{F}_2}$ , on montre que :

$$\overline{\mathrm{F}'_2\mathrm{F}'} = -\frac{\mathrm{f}_2\mathrm{f}'_2}{\Delta}$$ (***Figure III-7)*** ; $$\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{f}_1\mathrm{f}'_1}{\Delta}$$ (***Figure III-8)***

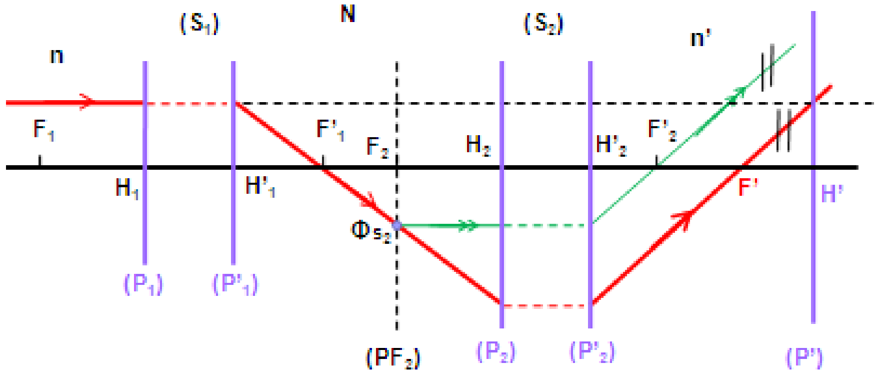



***Figure III-7***

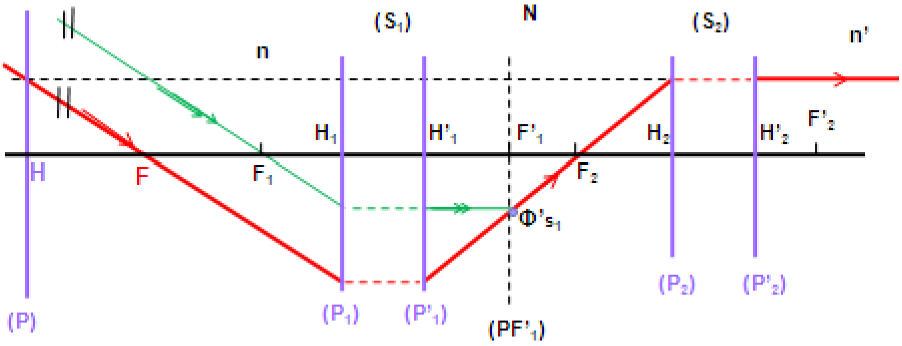



***Figure III-8***

### 6.3. Distances focales

On montre que les distances focales objet et image sont données par les relations simples suivantes :

$$f = \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \text{ (Figure III-8)} \quad ; \quad f' = \overline{H'F'} = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \text{ ((Figure III-7)}$$

### 6.4. Vergence. Formule de Gullstrand

La vergence s'écrit : $C = \frac{n'}{f'} = -\frac{n'\Delta}{f_1' f_2'}$

En développant $\Delta$ et en introduisant les vergences $C_1$ de $(S_1)$ et $C_2$ de $(S_2)$, il vient :

$$C = C_1 + C_2 - \frac{e\, C_1\, C_2}{N}$$

Cette relation est connue sous le nom de *formule de Gullstrand*.

N : indice du milieu intermédiaire.

## 7. Systèmes centrés afocaux

À tout incident parallèle à l'axe correspond un émergent également parallèle à l'axe. Ces systèmes présentent un intérêt particulier pour la vision des objets très éloignés (lunettes, télescope, etc.). Pour rendre afocal un instrument constitué par l'association de deux systèmes centrés, il suffit de faire coïncider le foyer image du premier avec le foyer objet du second.

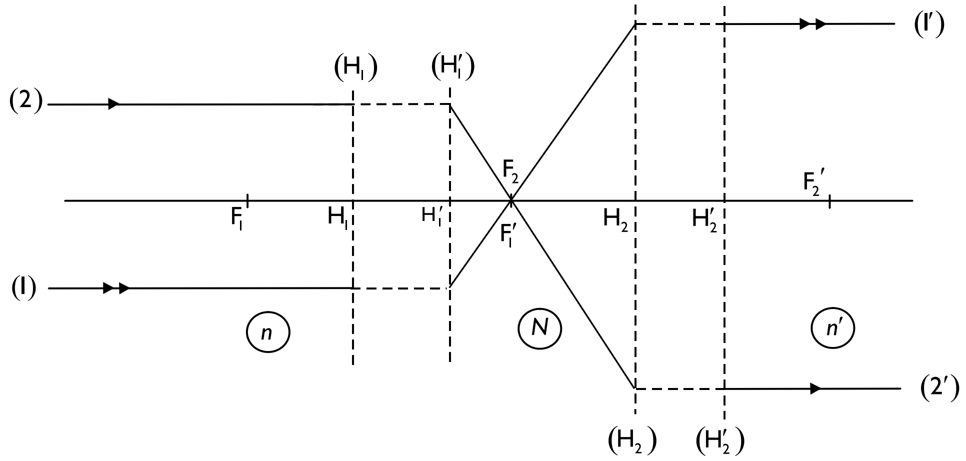



***Figure III-9***

## 8. Systèmes catadioptriques

De tels systèmes sont constitués par des dioptres et des miroirs. On montre qu'ils sont équivalents à un miroir de sommet $\Sigma$ et de centre $\Omega$ tels que :

- $\Omega$ est l'image du centre C du miroir réel à travers le système dioptrique dans le sens de la lumière réfléchie ;

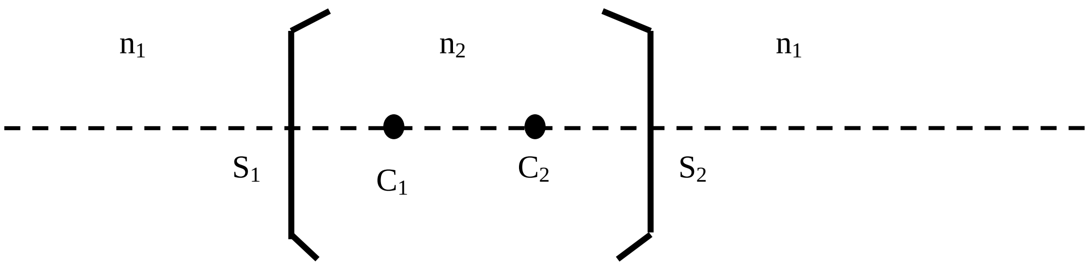
-$\Sigma$ est l'image du sommet S du miroir réel à travers le système dioptrique dans le sens de la lumière réfléchie.

# Exercices

## Exercice 1 : Système dioptrique

Soient deux dioptres sphériques que l'on représente sur la figure ci-dessous
On pose : $\overline{S_1C_1} = -\overline{S_2C_2} = \overline{C_1C_2} = R$. ($n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$)

1- Déterminer les positions des foyers de chacun des dioptres.
2- Déterminer les plans principaux de chacun des dioptres.
3- Déterminer les foyers du système
4- Quelles relations doivent vérifier les distances focales du système.
5- Déterminer géométriquement la position du plan principal image et en déduire la position du plan principal objet. Vérifier ce dernier résultat à partir de construction géométrique.




**Solution :**

**1- <u>a- Position des foyers $F_1$ et $F_1'$ du 1^er^ dioptre</u>**

$$\underset{(n_1)}{A} \xrightarrow{D_1\,(S_1,\,C_1)} \underset{(n_2)}{A_1} \xrightarrow{D_2\,(S_2,\,C_2)} \underset{(n_1)}{A'} \quad (\text{avec} : \overline{S_1C_1} = -\overline{S_2C_2} = \overline{C_1C_2} = R)$$

Formules de conjugaison :

Pour $D_1$ : $$\frac{n_1}{\overline{S_1A}} - \frac{n_2}{\overline{S_1A_1}} = \frac{n_1-n_2}{\overline{S_1C_1}} = \frac{n_1-n_2}{R} \qquad (1)$$

Pour $D_2$ : $$\frac{n_2}{\overline{S_2A_1}} - \frac{n_1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n_2-n_1}{\overline{S_2C_2}} = \frac{n_1-n_2}{R} \qquad (2)$$

$$\boxed{\overline{S_1F_1} = \frac{n_1\overline{S_1C_1}}{n_1-n_2} = \frac{n_1R}{n_1-n_2}} \qquad \textbf{AN :} \quad \boxed{\overline{S_1F_1} = -2R}$$

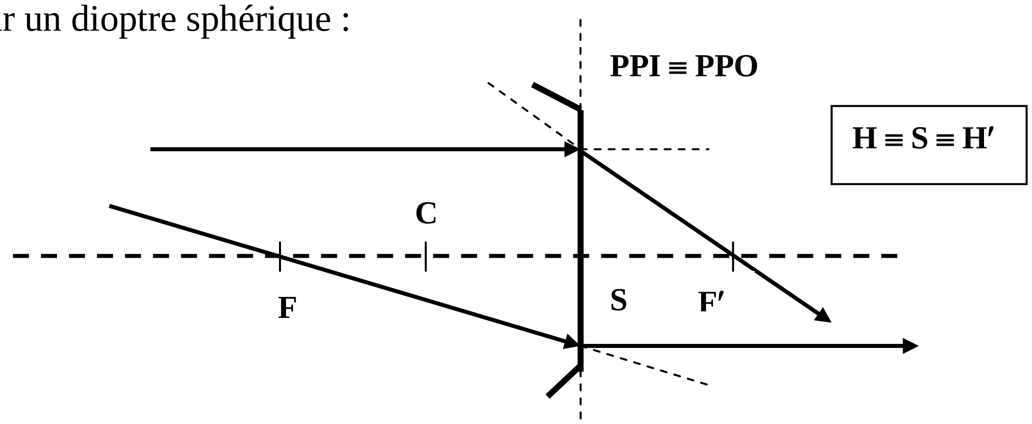
$$\boxed{\overline{S_1F_1'} = \frac{n_2\overline{S_1C_1}}{n_2-n_1} = \frac{n_2R}{n_2-n_1}} \qquad \textbf{AN :} \quad \boxed{\overline{S_1F_1'} = 3R}$$

**b- Position des foyers $F_2$ et $F_2'$ du 2ème dioptre**

$$\boxed{\overline{S_2F_2} = \frac{n_2\overline{S_2C_2}}{n_2 - n_1} = \frac{n_2 R}{n_1 - n_2}}$$ **AN :** $\boxed{\overline{S_2F_2} = -3R}$

$$\boxed{\overline{S_2F_2'} = \frac{n_1\overline{S_2C_2}}{n_1 - n_2} = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}}$$ **AN :** $\boxed{\overline{S_2F_2'} = 2R}$

2- Pour un dioptre sphérique :




Donc les plans principaux sont confondus et passent par le sommet S du D.S :

Pour $D_1$ $(S_1, C_1)$ : $\boxed{H_1 \equiv S_1 \equiv H_1'}$

Pour $D_2$ $(S_2, C_2)$ : $\boxed{H_2 \equiv S_2 \equiv H_2'}$

3- Déterminons les foyers du système :

- **<u>Foyer objet</u> F :**

$$A \xrightarrow{D_1\,(S_1,\,C_1)} A_1 \xrightarrow{D_2\,(S_2,\,C_2)} A'$$

$$A \equiv F \longrightarrow A_1 \equiv F_2 \longrightarrow A' \to \infty$$

$F_2$ est l'image de F à travers le 1er dioptre ($D_1$)

Appliquons la formule de Newton à $D_1 \Rightarrow$ $\overline{F_1F} \,.\, \overline{F_1'F_2} = \overline{S_1F_1} \,.\, \overline{S_1F_1'} = f_1 f_1'$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1 f_1'}{\overline{F_1'F_2}}}$$

AN : $f_1 = \overline{S_1F_1} = -2R$ ; $f_1' = \overline{S_1F_1'} = 3R$ et $\overline{F_1'F_2} = -3R$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\overline{F_1F} = 2R}$ $\Rightarrow$ $F \equiv S_1 \equiv F_2$

- **<u>Foyer image F′</u>**

$$A \xrightarrow{D_1\,(S_1,\,C_1)} A_1 \xrightarrow{D_2\,(S_2,\,C_2)} A'$$

$$A \to \infty \longrightarrow A_1 \equiv F_1' \longrightarrow A' \to F'$$

F′ est l'image de $F_1'$ à travers "$D_2$"

Appliquons la formule de Newton à $D_2 \Rightarrow \overline{F_2F_1'}\ \overline{F_2'F'} = \overline{S_2F_2}\ \overline{S_2F_2'} = f_2\, f_2'$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_2'F'} = \frac{f_2\, f_2'}{\overline{F_2F_1'}}}$$

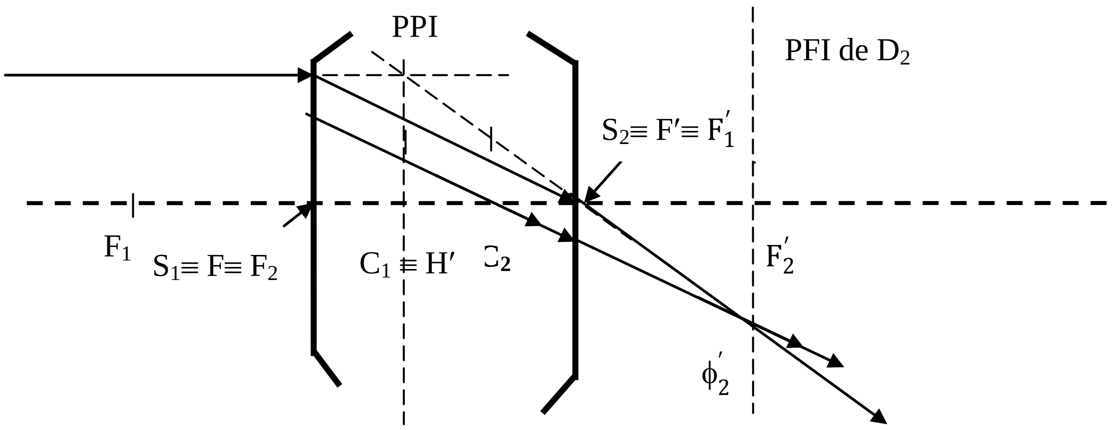
AN : $f_2 = \overline{S_2F_2} = -3\,R$ ; $f_2' = \overline{S_2F_2'} = 2\,R$ et $\overline{F_2F_1'} = 3R$.

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F_2'F'} = -2R} \qquad \Rightarrow \qquad F' \equiv S_2 \equiv F_1'$$

4- La relation entre les distances focales du système :

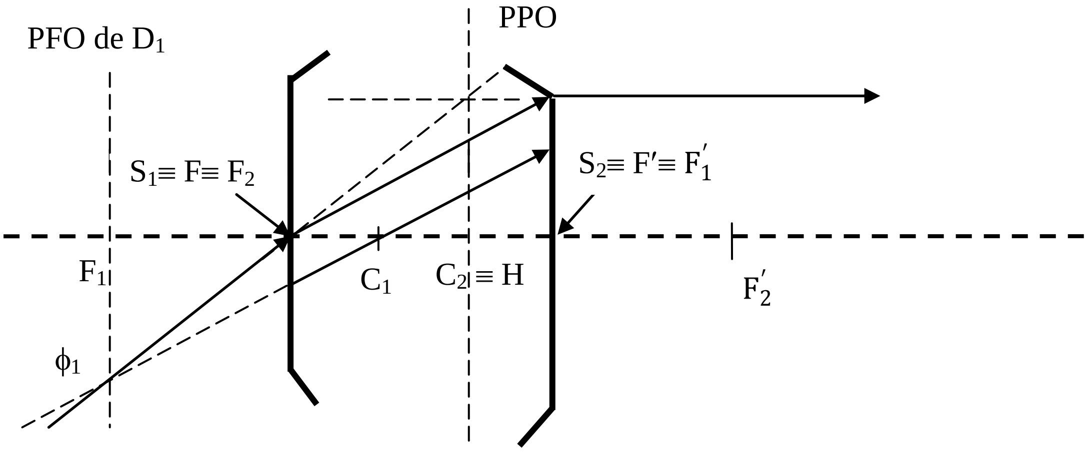
$$\frac{\overline{H'F'}}{\overline{HF}} = -1 \text{ (Les milieux extrêmes sont identiques)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{H'F'} = -\overline{HF}}$$

5- Détermination du plan principal image :



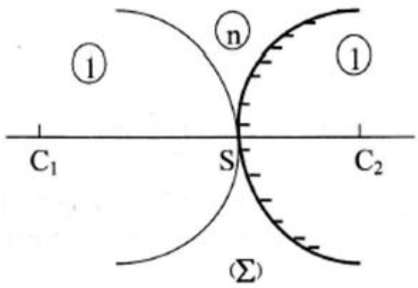

D'après la construction géométrique, on mesure : $\overline{H'F'} = 2\,R \Rightarrow \overline{HF} = -2R$

- Détermination du plan principal objet (Vérification géométrique) :




**Exercice 2 : Système catadioptrique**

On considère un système catadioptrique ($\Sigma$) d'indice n, plongé dans l'air constitué d'un dioptre sphérique (DS), de sommet S et de centre $C_1$, et d'un miroir sphérique (MS), de même sommet S et de centre $C_2$, comme le montre la figure ci-contre.




1- En supposant qu'à travers ($\Sigma$), un objet A peut avoir trois image $A_o$, $A_1$ et $A'$ selon le trajet suivant :

$$A \xrightarrow{DS} A_o \xrightarrow{MS} A_1 \xrightarrow{DS} A'$$

Ecrivez la formule de conjugaison relative à chaque passage en considérant l'origine au sommet S.

2- En déduire la formule de conjugaison du système ($\Sigma$) reliant les points conjugués A et $A'$.

3- Montrer que le système ($\Sigma$) est équivalent à un miroir sphérique de sommet S et de centre C dont on déterminera le rayon de courbure R = $\overline{SC}$ en fonction de $R_1 = \overline{SC_1}$ et $R_2 = \overline{SC_2}$ .

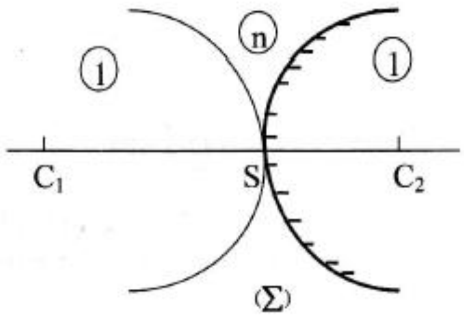
4- Quelle est la nature de ce miroir équivalent ?

**Solution :**

1. $\underset{(1)}{A} \xrightarrow{DS} \underset{(n)}{A_0}$ $\qquad \dfrac{1}{\overline{SA}} - \dfrac{n}{\overline{SA_0}} = \dfrac{1-n}{\overline{SC_1}} \quad (1)$

   $\underset{(n)}{A_0} \xrightarrow{MS} \underset{(n)}{A_1}$ $\qquad \dfrac{1}{\overline{SA_0}} + \dfrac{1}{\overline{SA_1}} = \dfrac{2}{\overline{SC_2}} \quad (2)$

   $\underset{(n)}{A_1} \xrightarrow{DS} \underset{(1)}{A'}$ $\qquad \dfrac{n}{\overline{SA_1}} - \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{n-1}{\overline{SC_1}} \quad (3)$




2. (1) +[ $n$ x (2)] - (3) : $\boxed{\dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \dfrac{2n}{\overline{SC_2}}}$

3. la formule de conjugaison du système ($\sum$) est équivalente à celle d'un miroir sphérique de sommet S, de centre C et de rayon $R = \overline{SC}$ tel que :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Longrightarrow \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \frac{2n}{\overline{SC_2}} \Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1-n}{R_1} + \frac{n}{R_2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R = \frac{R_1 R_2}{nR_1 + (1-n)R_2}}$$

**4. $R_1 < 0$, $R_2 > 0$ et $n > 1$ ; ceci implique que $R > 0$. Par conséquent, le miroir sphérique équivalent est convexe.**