2015 N

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

On calcule directement le discriminant de cette équation à l'aide de la formule connue :

$$\begin{aligned}\Delta &= (5+i\sqrt{3})^2 - 4(4+4i\sqrt{3})\\ &= 25+10i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2-16-16i\sqrt{3}\\ &= 25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}\\ &= 6-6i\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où le résultat suivant : $\Delta = 6-6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (1)$

De l'autre côté, On développe $(3-i\sqrt{3})^2$ on trouve :

$$(3-i\sqrt{3})^2 = 9-6i\sqrt{3}-3 = 6-6i\sqrt{3}$$

D'où le résultat suivant :

$$(3-i\sqrt{3})^2 = 6-6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que $\Delta = (3-i\sqrt{3})^2$

Remarque : la question posée est une question de vérification. C-à-d que le résultat est connu à priori. Et on vous demande de le redémontrer et de le redécouvrir. Mais si on reformule la question ainsi : écrire sous la forme d'un carré, alors là je vous propose le procédé suivant :

Premièrement : On doit écrire $(6-6i\sqrt{3})$ sous sa forme exponentielle $re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2} = 12$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad 6-6i\sqrt{3} &= 12\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 12\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\ &= 12e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{aligned}$$

Il est facile maintenant de trouver les racines carrées de $12e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Rappel : les racines $n^{\text{ème}}$ du nombre complexe $re^{i\theta}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$.
k et n sont deux entiers naturels qui vérifient $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-1$.

D'après ce petit rappel, on déduit que les racines carrées de $12e^{\frac{-i\pi}{3}}$ sont :

$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt[2]{12}\, e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2\times 0\times\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{-i\pi}{6}}\\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\\ &= 3-i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[2]{12}\, e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2\times 1\times\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{5i\pi}{6}}\\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= -3+i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalement on écrit : $\Delta = (3-i\sqrt{3})^2 = (-3+i\sqrt{3})^2$

La Question : 1) b)

$$a = \frac{(5+i\sqrt{3})-(3-i\sqrt{3})}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

$$b = \frac{(5+i\sqrt{3})+(3-i\sqrt{3})}{2} = 4 \in \mathbb{R}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}(1-i\sqrt{3})a &= (1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})\\ &= 1^2-(i\sqrt{3})^2\\ &= 1-(-3) = 4 = b\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

Soit R la rotation mentionnée dans cette question

$$\begin{aligned}R(O) = B_1 &\Leftrightarrow (z_{B_1}-z_A) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_O-z_A)\\ &\Leftrightarrow (b_1-a) = i(0-a)\\ &\Leftrightarrow b_1 = a(1-i)\\ &\Leftrightarrow b_1 = (1+\sqrt{3})(1-i)\\ &\Leftrightarrow b_1 = (1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Notons par H la transformation du plan (P) qui associe B à B_1

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_B-z_A}{z_{B_1}-z_A}\right) &= \frac{4-1-i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i-1-i\sqrt{3}}\\ &= \frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B_1} - z_A}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow (z_B - z_A) = \sqrt{3}(z_{B_1} - z_A)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{AB_1}$$

Donc B est l'image de B_1 par l'homothétie H de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

La Question : 2) c)

$$\frac{b}{b-a} = \frac{(1-i\sqrt{3})a}{(1-i\sqrt{3})a - a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$\left|1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{b-a} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

La Question : 2) d)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle OAB et soit C un point du cercle $(\mathcal{C})$ différent de O et de B .

$$C \in (\mathcal{C}) \Rightarrow O, A, B \text{ et } C \text{ sont circulaires}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_O - z_c}{z_A - z_c}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_A - z_B}\right)[\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{0-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{0-b}{a-b}\right)[\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{-b}{a-b}\right)[\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) + \pi \equiv \arg\left(\frac{b}{a-b}\right) + \pi[\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{a-b}\right)[\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$$

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

Rappel : (Théorème de Bezout)

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{Z} \; ; \; au + bv = 1$$

On a : $1436(1051) + 2015(-749) = 1$

Alors : $2015 \wedge 1436 = 1$

La Question : 2) a)

Soit x un entier relatif vérifiant $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

$$\Rightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; x^{1439} - 1436 = 2015k$$
$$\Rightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; x^{1439} - 2015k = 1436$$

Soit d un diviseur commun des nombres x et 2015

$$\Rightarrow d/x \;\; et \;\; d/2015$$
$$\Rightarrow d/x^{1439} \;\; et \;\; d/2015k$$
$$\Rightarrow d/(x^{1439} - 2015k)$$
$$\Rightarrow d/1436$$

La Question : 2) b)

Soit $\delta = 2015 \wedge x$

$$\Rightarrow \delta/2015 \;\; et \;\; \delta/x$$
$$\Rightarrow \delta/2015 \;\; et \;\; \delta/1436 \; ; \; selon 2)a)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \delta/(2015 \times 749) \\ \delta/(1436 \times 1051) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \delta/(1436 \times 1051 - 2015 \times 749)$$
$$\Rightarrow \delta/1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} oubien \;\; \delta = 1 \\ oubien \;\; \delta = -1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \delta = 1 \; ; \; car \; 1 > -1$$
$$\Rightarrow 2015 \wedge x = 1$$

La Question : 3) a)

Rappel : (Théorème de Fermat)

La Forme générale :

$$p \in \mathbb{P} \Rightarrow (\forall a \epsilon \mathbb{Z}) : a^p \equiv a[p]$$

La Forme réduite :

$$\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \right. \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Pour commencer, il est très facile de montrer que 5, 13 et 31 sont tous des nombres premiers. Et cela à l'aide du critère connu par tout le monde (test de primalité). Aussi, une simple calculette nous assure les égalités suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} 1440 = 360 \times 4 \\ 1440 = 120 \times 12 \\ 1440 = 30 \times 48 \end{array} \right.$$

Rappel : $x \wedge abc = 1 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \wedge a = 1 \\ x \wedge b = 1 \\ x \wedge c = 1 \end{array} \right.$

$$x \wedge 2015 = 1 \Leftrightarrow x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1$$
$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \wedge 5 = 1 \\ x \wedge 13 = 1 \\ x \wedge 31 = 1 \end{array} \right.$$

Et voilà ! on dispose maintenant des armes nécessaires pour appliquer le Théorème de Fermat sous sa forme réduite :

$$\begin{vmatrix} 5 \epsilon \mathbb{P} \\ x \wedge 5 = 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &\Rightarrow x^{5-1} \equiv 1[5] \\ &\Rightarrow x^4 \equiv 1[5] \\ &\Rightarrow (x^4)^{360} \equiv 1^{360}[5] \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[5] \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 13 \epsilon \mathbb{P} \\ x \wedge 13 = 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &\Rightarrow x^{13-1} \equiv 1[13] \\ &\Rightarrow x^{12} \equiv 1[13] \\ &\Rightarrow (x^{12})^{120} \equiv 1^{120}[13] \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[13] \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 31 \epsilon \mathbb{P} \\ x \wedge 31 = 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &\Rightarrow x^{31-1} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow x^{30} \equiv 1[31] \\ &\Rightarrow (x^{30})^{48} \equiv 1^{48}[31] \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[31] \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Rappel : $\begin{vmatrix} a/n \\ b/n \\ a \wedge b = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow ab/n$

$$\begin{vmatrix} x^{1440} \equiv 1[5] \\ x^{1440} \equiv 1[13] \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5/(x^{1440}-1) \\ 13/(x^{1440}-1) \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (5 \times 13)/(x^{1440}-1) \\ &\Rightarrow 65/(x^{1440}-1) \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[65] \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x^{1440} \equiv 1[65] \\ x^{1440} \equiv 1[31] \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 65/(x^{1440}-1) \\ 31/(x^{1440}-1) \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (65 \times 31)/(x^{1440}-1) \\ &\Rightarrow 2015/(x^{1440}-1) \\ &\Rightarrow x^{1440} \equiv 1[2015] \end{aligned}$$

La Question : 4)

$$\begin{vmatrix} x^{1439} \equiv 1436[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x \cdot x^{1439} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x^{1440} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1436x \equiv 1[2015] \quad (1) \\ 1436 \times 1051 \equiv 1[2015] \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1)-(2) &\Rightarrow 1436(x-1051) \equiv 0[2015] \\ &\Rightarrow 2015/1436(x-1051) \\ &\Rightarrow 2015/(x-1051) \; ; \; Gauss \\ &\Rightarrow x \equiv 1051[2015] \end{aligned}$$

Remarque : On peut montrer que $2015 \wedge 1436 = 1$ à l'aide du procédé de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2015 et de1436

On a : $\begin{vmatrix} 2015 = 5 \times 13 \times 31 \\ 1436 = 2^2 \times 359 \end{vmatrix}$

D'où : $(5 \times 13 \times 31) \wedge (2^2 \times 359) = 1$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

L'application φ est définie comme suit :

$$\varphi \; : \; \begin{aligned} (\mathbb{R},+) &\mapsto (E,\top) \\ x &\mapsto M(x-1) \end{aligned}$$

Le but de cette question est de montrer la chose suivante : $\varphi(x+y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$
Pour commencer, soient x et y deux nombres réels .

$$\begin{aligned} \varphi(x) \top \varphi(y) &= M(x-1) \top M(y-1) \\ &= M(x-1+y-1+1) \\ &= M(x+y-1) \\ &= \varphi(x+y) \end{aligned}$$

D'où φ est un homomorphisme de groupes.

La Question : 1) b)

Premièrement, On veut-bien montrer que φ est une bijection. Il suffit de résoudre l'équation $\varphi(x) = M(x-1)$ dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle admet une seule solution réelle .
Etant donnée M une matrice de E, alors par définition de l'ensemble E on peut écrire M sous la forme $M = M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ avec x est un nombre réel. Donc $\varphi(x+1) = M(x)$
c-à-d : $(\forall M \epsilon E)(\exists! \, x \epsilon \mathbb{R}) \; : \; \varphi(x+1) = M(x)$
Et d'après la définition d'une application bijective on conclut que φ est bien une bijection
Ainsi, l'image du groupe $(\mathbb{R},+)$ par φ est le groupe $(E,\top)$ (car $\varphi(\mathbb{R}) = E$)

Rappel : Si f est un homomorphisme d'un groupe $(G,*)$ vers un ensemble $(F,\top)$. alors l'image du groupe $(G,*)$ par f est le groupe $(f(G),\top)$.

Les propriétés caractéristiques du groupe $(E,\top)$ seront déduites à partir de celles du groupe $(\mathbb{R},+)$ par le biais de l'application φ . Autrement-dit, il suffit d'exploiter l'égalité $\varphi(\mathbb{R},+) = (E,\top)$.
Comme $(\mathbb{R},+)$ est commutatif alors $(E,\top)$ l'est aussi.
Comme 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R},+)$
alors $\varphi(0)$ sera l'élément neutre pour $(E,\top)$ avec $\varphi(0) = M(0-1) = M(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Donc la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sera l'élément neutre pour $(E,\top)$.

Le symétrique d'un élément $\varphi(x)$ dans $(E,\top)$ est l'élément $\varphi(-x)$ dans $(E,\top)$ (car $-x$ est le symétrique de x dans $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi(-x) = M(-x-1)$

La Question : 2) a)

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) - 2xy & y(1-x) + x(1+2y) \\ -2x(1-y) - 2y(1+2x) & -2xy + (1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & x+y+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2x+2y+2xy \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & (x+y+xy) \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y)+xy \end{pmatrix}$$
$$= M(x+y+xy)$$

La Question : 2) b)

E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées, d'ordre 2 à coefficients réels, qui s'écrivent sous la forme $M(x)$ définie dans l'énoncé. Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de E, Alors On a d'après la question précédente : $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$
comme x et y sont deux nombres réels
alors $(x+y+xy)$ est aussi un nombre réel
d'où : $\forall\, M(x), M(y) \in E \;:\; M(x) \times M(y) \in E$
Donc E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stable par la multiplication matricielle $\times$ dans E.
$\times$ est commutative dans E car :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= M(x+y+xy) \\ &= M(y+x+yx) \\ &= M(y) \times M(x) \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Soient $M(x)$, $M(y)$ et $M(z)$ trois éléments de E.

$$\begin{aligned} M(x) \times \big(M(y) \times M(z)\big) &= M(x) \times M(y+z+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\big(M(x) \times M(y)\big) \top \big(M(x) \times M(z)\big) \\ &\qquad = M(x+y+xy) \top M(x+z+xz) \\ &\qquad = M(x+y+xy+x+z+xz+1) \\ &\qquad = M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (**) \end{aligned}$$

D'après les résultats $(*)$ et $(**)$ on tire :

$$\begin{aligned} &M(x) \times \big(M(y) \times M(z)\big) \\ &\qquad = \big(M(x) \times M(y)\big) \top \big(M(x) \times M(z)\big) \end{aligned}$$

Donc $\times$ est distributive à gauche par rapport à $\top$. on vérifie aisément la distributivité à droite de $\times$ par rapport à $\top$ pour conclure finalement que $\times$ est distributive par rapport à $\top$.

Soit $M(x)$ un élément de .

$$\begin{aligned} M(x) \top M(-1) &= M(x-1+1) = M(x) \\ M(-1) \top M(x) &= M(-1+x+1) = M(x) \end{aligned}$$

Donc $M(-1)$ est l'élément neutre du groupe $(E,\top)$ pour la matrice unité I.
on a tout d'abord $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 \\ -2\times 0 & 1+2\times 0 \end{pmatrix}$
soit $M(x)$ un élément de E on a :
$$\left| \begin{aligned} M(x) \times M(0) &= M(x+0+x0) = M(x) \\ M(0) \times M(x) &= M(0+x+0x) = M(x) \end{aligned} \right.$$
Donc $M(0) = I$ est l'élément neutre de la multiplication matricielle $\times$ dans E .

La Question : 3) a)

Soit x un nombre réel différent de -1,

$$\begin{aligned} M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) &= M\left(x + \frac{-x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x}\right) \\ &= M\left(\frac{x^2+x-x-x^2}{1+x}\right) \\ &= M(0) = I \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Rappel : soit E un ensemble muni de deux lois de compositions internes $*$ et $\top$.

$(E,*,\top)$ est un corps Si et seulement si :

- $(E,*)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $(E\backslash\{e\},\top)$ est un groupe
- $\top$ est distributive par rapport à $*$

Avec e est l'élément neutre du groupe $(E,*)$.

Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $E\backslash\{M(-1)\}$
On a : $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$
Comme $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y(x+1) \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$
Donc $x + y(x+1) \neq -1$
c-à-d : $(x+y+xy) \neq -1$
D'où : $M(x+y+xy) \in E \backslash\{M(-1)\}$

Donc $\times$ est une loi de composition interne dans l'ensemble $E\backslash\{M(-1)\}$.

Comme $\times$ est associative dans E alors elle l'est aussi dans $E\backslash\{M(-1)\}$. comme $I = M(0)$ est l'élément neutre pour $(E,\times)$ et $M(0) \in E\backslash\{M(-1)\}$ alors I est aussi l'élément neutre pour $\times$ dans $E\backslash\{M(-1)\}$

Comme $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $M(x) \times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$
alors tout élément $M(x)$ de $E\backslash\{M(-1)\}$ admet un symétrique $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ dans $E\backslash\{M(-1)\}$

Finalement : On a trouvé que × est une loi de composition interne dans $E\backslash\{M(-1)\}$, associative, admet un élément neutre et qui vérifie la symétrie des éléments de $E\backslash\{M(-1)\}$
alors $(E\backslash\{M(-1)\}\,;\times)$ est un groupe (1) .

Mais d'après les questions précédentes on a vu que $(E,\top)$ est un groupe (2) . et aussi que × est distributive par rapport à ⊤ (3). Donc on tire des résultats (1) , (2) et (3) , à l'aide du rappel que $(E,\top,\times)$ est bien un corps qui est commutatif car la loi × est commutative dans E.

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\left(1+\underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+(\ln x)^2 = +\infty$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OY)

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x(1+(\ln x)^2)\\ &= \lim_{x\to0^+} x + x(\ln x)^2\\ &= 0 + \lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2\\ &= \lim_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2\\ &= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=\sqrt{x}}} 4t^2\ln t\\ &= \lim_{t\to0^+} \left(\underbrace{4t}_{0}\right)\left(\underbrace{t\ln t}_{0}\right) = 0 = f(0)\end{aligned}$$

Alors la fonction f est bien continue à droite en 0 .

La Question : I) 2) b)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1+\left(\underbrace{\ln x}_{-\infty}\right)^2 = +\infty$$

l'axe (OY) est tangente à (C) au voisinage de 0 .

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\ln x)^2 + 2(\ln x) + 1\\ &= (\ln x + 1)^2 > 0\ ;\ \forall x > 0\end{aligned}$$

Alors la fonction f est purement croissante.

La Question : I) 3) a)

$$f'(x) = (\ln x + 1)^2$$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant un carré d'une autre fonction aussi dérivable. La dérivée seconde f'' est définie par :

$$f''(x) = 2(\ln x + 1)\cdot\frac{1}{x} = \frac{2(\ln x+1)}{x}$$

Si $x = \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) = 0$

Si $x > \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) > 0$

Si $x < \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) < 0$

Alors $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexion à (C) .

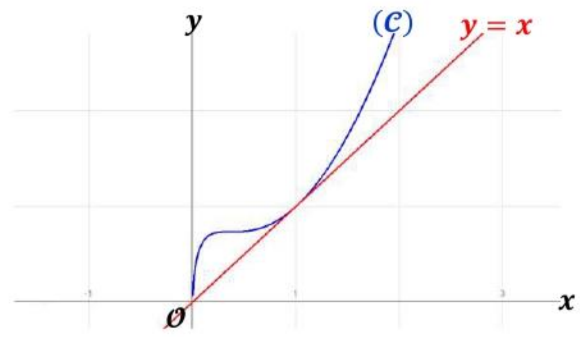
La Question : I) 3) b)

$$f(x) - x = x(1+(\ln x)^2) - x = x(\ln x)^2$$

$$\begin{aligned}Alors\ :\ signe(f(x)-x) &\equiv signe(x(\ln x)^2)\\ &\equiv signe(x)\ ;\ car\ \ (\ln x)^2 > 0\\ &\equiv (+)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \forall x \geq 0\ ;\ f(x) - x \geq 0$$
$$\Rightarrow\ \forall x \epsilon [0,+\infty[\ ;\ f(x) \geq x$$

La Question : I) 3) c)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Soit (P_n) la proposition définie comme suit :
$(P_n)\ :\ \frac{1}{e} \leq u_n < 1$. Examinons la véracité de (P_n) pour chaque n de $\mathbb{N}$ à l'aide du procédé de récurrence. L'instance (P_0) est validée car tout simplement $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$.
Soit n dans $\mathbb{N}$ et on suppose que (P_n) soit vraie.

$$
\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow\ e^{-1} \leq u_n < 1 \\
&\Rightarrow\ f(e^{-1}) \leq f(u_n) < f(1) \\
&\Rightarrow\ \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1\ ;\ car\ f\ est\ \nearrow \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{e} < \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1 \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{e} < f(u_n) < 1 \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{e} \leq f(u_n) < 1 \\
&\Rightarrow\ (P_{n+1})\ \ est\ vraie
\end{aligned}
$$

Ainsi : $\begin{cases} l'instance(P_0)\ est\ vraie \\ l'instance(P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N} \end{cases}$

Donc (P_n) est toujours vraie
C-à-d : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$; $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$

La Question : II) 2)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x > 0)\ :\ f(x) \geq x \\
&(pour\ x = u_n)\ :\ f(u_n) \geq u_n \\
&car\ (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n \geq \frac{1}{e} > 0 \\
&Donc\ (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \geq u_n
\end{aligned}
$$

Et par définition de la croissance des suites on conclut que $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
Or, $\forall n \epsilon \mathbb{N}$; $u_n < 1$ (majorée par 1)
Donc $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle l .

La Question : II) 3) a)

$$
\begin{aligned}
(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ &\frac{1}{e} \leq u_n < 1 \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{e} \leq l \leq 1 \quad ;\ passage\ aux\ limites
\end{aligned}
$$

La Question : II) 3) b)

$$
(u_n) : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{e} \end{cases}
$$

f est une fonction continue et croissante, soit $l = \lim_{n\infty}(u_n)$; Donc l vérifie : $l = f(l)$.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ l(1 + (\ln l)^2) = l \\
&\Leftrightarrow\ 1 + (\ln l)^2 = 1\ ;\ l \neq 0 \\
&\Leftrightarrow\ (\ln l)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \ln l = 0 \\
&\Leftrightarrow\ l = 1
\end{aligned}
$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Une condition suffisante pour qu'une fonction f admette des primitives sur un intervalle est qu'elle y soit continue. Il est évident que la fonction h est bien continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme étant somme de deux fonctions trivialement continues sur $]0, +\infty[$. il reste à démontrer que :
$\forall\ x\ \epsilon\ ]0, +\infty[\ ;\ H'(x) = h(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{Soit } x > 0\ ;\ H'(x) &= \tfrac{-2}{4}x + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^2}{x} + 2x\ln x\right) \\
&= \frac{-x}{2} + \frac{x}{2} + x\ln x \\
&= x\ln x \\
&= h(x)
\end{aligned}
$$

La Question : III) 1) b)

Je propose une démarche à base d'une intégration par parties.
Rappel : l'intégration par parties est la méthode à travers laquelle on transforme l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales dans le but de simplifier le calcul :

$$
\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^x \underbrace{t}_{u'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{v(t)}\,dt &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \cdot (\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} \cdot 2\ln t \cdot \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int_1^x t\ln t\,dt
\end{aligned}
$$

La Question : III) 1) c)

Evaluons d'abord l'intégrale suivante : $\int_1^x tlnt\,dt$

$$
\begin{aligned}
\int_1^x (t\ln t)dt = \int_1^x H'(t)\,dt \ &= [H(t)]_1^x \\
&= H(x) - H(1) \\
&= \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^x f(t)\,dt\\ &= \int_1^x t(1+(\ln t)^2)\,dt\\ &= \int_1^x t\,dt + \int_1^x \underbrace{t}_{v'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{u(t)}\,dt\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x + \left[\frac{t^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2}\cdot 2\ln t\cdot\frac{1}{t}\right)dt\\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int_1^x (t\ln t)\,dt\\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}\end{aligned}$$

La Question : III) 2) a)

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}$$

F est continue sur $[0,+\infty[$ comme étant somme de quatre fonctions toutes continues sur $[0,+\infty[$.

La Question : III) 2) b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} F(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}\right)\\ &= \left(\frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0\right) = \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

La continuité à droite en 0 nous donne :

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) \implies \frac{-3}{4} = \int_1^0 f(t)\,dt$$
$$\implies \frac{3}{4} = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x] \implies x \le t \le 2x$

$$\begin{aligned}&\implies -2x \le -t \le -x\\ &\implies e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}\ ;\ Exp\ est \nearrow\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$

$$e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \implies \frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t}\ ;\ t > 0$$

$$\implies \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{t}\right)dt \le \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt \le \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-x}}{t}\right)dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale parce que les trois fonctions sont toutes continues sur $[x, 2x]$ et aussi $x < 2x$ gardera l'ordre inchangeable.

$$\implies e^{-2x}[\ln|t|]_x^{2x} \le g(x) \le e^{-x}[\ln|t|]_x^{2x}$$
$$\implies e^{-2x}(\ln 2) \le g(x) \le e^{-x}(\ln 2)$$

La Question : 1) c)

$$\underbrace{e^{-2x}(\ln 2)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln 2} \le g(x) \le \underbrace{e^{-x}(\ln 2)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln 2}$$

$$\implies \lim_{x\to 0^+} g(x) = \ln 2 = g(0)$$
$$\implies g\ est\ bien\ conitnue\ à\ droite\ en\ 0$$

La Question : 2)

Soit a un réel strictement positif.
La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $a \in]0,+\infty[$ Donc $\psi : x \mapsto \int_a^x\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt$ est la seule fonction primitive de φ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en a

C-à-d : $\begin{cases}\forall x > 0\ ;\ \psi'(x) = \varphi(x)\\ \psi(a) = 0\end{cases}$

$$\begin{aligned}g(x) = \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt &= \int_x^{2x}\varphi(t)\,dt\\ &= \int_x^a \varphi(t)\,dt + \int_a^x \varphi(t)\,dt\\ &= -\int_a^x \varphi(t)\,dt + \int_a^{2x}\varphi(t)\,dt\\ &= -\psi(x) + \psi(2x)\end{aligned}$$

g est dérivable car elle s'écrit sous la forme d'une somme de deux compositions continues de fonctions continues.

$$\begin{aligned}g'(x) = -\psi'(x) + 2\psi'(2x) &= -\varphi(x) + 2\varphi(2x)\\ &= \frac{-e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-2x}}{2x}\\ &= \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}\end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit $t > 0$. la fonction $h : x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'usage du **TAF** est donc valable sur n'importe quel intervalle dans $\mathbb{R}$.
En particulier sur $[0, t]$

$$\begin{cases}h\ est\ continue\ sur\ [0,t]\\ h\ est\ dérivable\ sur\ ]0,t[\end{cases}$$

$$Donc\ :\ \exists\ c \in]0,t[\ ;\ \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = h^{'}(c)$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} 0 < c < t \\ \left(\dfrac{e^{-t}-1}{t}\right) = -e^{-c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 < c < t\ &\Rightarrow\ -t < -c < 0 \\ &\Rightarrow\ e^{-t} < e^{-c} < 1\ ;\ Expo\ est\ \nearrow \\ &\Rightarrow\ -1 < -e^{-c} < -e^{-t} \\ &\Rightarrow\ -1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}\ ;\ t > 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soient x et t deux nmbres réels strictement positifs.

$$-1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}\ ;\ t > 0$$

$$\Rightarrow\ \int_x^{2x} (-1)\,dt < \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}-1}{t}\right) dt < \int_x^{2x} (-e^{-t})\,dt$$

On a introduit l'intégrale sur cet encadrement car la continuité est vérifiée et $x < 2x$

$$\Rightarrow\ -[t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt - \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq [e^{-t}]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow\ -x \leq g(x) - \ln 2 \leq e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\Rightarrow\ -1 \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\ ;\ x > 0$$

La Question : 3) c)

Calculons tout d'abord cette gentille limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+} (e^{-x}) \left(\frac{e^{-x}-e^{0}}{x-0}\right) \\ &= (e^{-0})\left((e^{-x})^{'}_{/x=0}\right) \\ &= (e^{-0})(-e^{-0}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$D^{'}o\grave{u} :\ \underbrace{-1}_{\xrightarrow[\boldsymbol{x\to 0^+}]{} \boldsymbol{-1}} \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\right)}_{\xrightarrow[\boldsymbol{x\to 0^+}]{} \boldsymbol{-1}}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = -1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ g\ est\ d\acute{e}rivable\ \grave{a}\ droite\ en\ 0$$