2015 R

Le Premier Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\forall (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 \ ; \ x * y = x + y - e^{xy} + 1$$
$$= y + x - e^{xy} + 1$$
$$= y * x$$

Donc $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

La Question : I) 1) b)

Soit a l'élément neutre da la loi $*$ dans $\mathbb{R}$,
alors : $a * x = x * a = x$

$$\Rightarrow \ a + x - e^{ax} + 1 = x \ ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \ e^{ax} = a + 1 \ ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \ \ln(e^{ax}) = \ln(a+1) \ ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \ ax = \ln(a+1) \ ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \ ax + 0 = 0x + \ln(a+1) \ ; \ \forall x \epsilon \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ a = 0 \\ Et\ bien\ \ \ln(a+1) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \ a = 0 \ \epsilon \ \mathbb{R}$$

Donc l'élément neutre de la loi $*$ est 0

Remarque : j'ai utilisé le fait que deux polynômes $\left(\sum_0^n a_i x^i\right)$ et $\left(\sum_0^n b_i x^i\right)$ sont égaux si et seulement si $\forall (1 \leq i \leq n) \ ; \ a_i = b_i$

La Question : I) 2)

L'équation $3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions réelles différentes α et β.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \alpha - e^{2\alpha} = 0 \\ 3 + \beta - e^{2\beta} = 0 \end{cases} ; \ \alpha \neq \beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha - e^{2\alpha} + 1 = 0 \\ 2 + \beta - e^{2\beta} + 1 = 0 \end{cases} ; \ \alpha \neq \beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 * \alpha = \alpha * 2 = 0 \\ 2 * \beta = \beta * 2 = 0 \end{cases} ; \ \alpha \neq \beta$$

Dire que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}$ revient à démontrer, pour tout triplet $(x,y,z) \ \epsilon \ \mathbb{R}^3$, la chose suivante : $(x * y) * z = x * (y * z)$ $(\blacksquare)$.
Réfuter l'associativité revient donc à trouver un triplet qui ne vérifie pas l'égalité $(\blacksquare)$ (un contre exemple), il suffit de remarquer que le triplet $(\alpha, 2, \beta)$ accomplira la tache avec rigueur.
d'une part : $\alpha * (2 * \beta) = \alpha * 0 = \alpha$
et d'autre part : $(\alpha * 2) * \beta = 0 * \beta = \beta$
comme $\alpha \neq \beta$ alors $\alpha * (2 * \beta) \neq (\alpha * 2) * \beta$
Donc c'est gagné.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : En algèbre linéaire, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une partie non vide F de E stable par combinaisons linéaires. Cette stabilité s'exprime par : la somme de deux vecteurs de F appartient à F. et le produit d'un vecteur par un scalaire appartient à F aussi. Premièrement, F est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de F. soient $M(x,y)$ *et* $M'(x',y')$ deux éléments de F et soit α un nombre réel. Pour simplifier, on pose $M(x,y) = M$ *et* $M'(x',y') = M'$

$$\alpha M + M' = \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \frac{y'}{2} & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2\alpha y - 2y' \\ \frac{\alpha y}{2} + \frac{y'}{2} & \alpha x + x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -2(\alpha y - y') \\ \frac{\alpha y + y'}{2} & (\alpha x + x') \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha x + x' ; \alpha y + y') \in F$$

$Ainsi\ : \ (\forall\ (M, M') \in F^2), (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ ;\ (\alpha M + M') \in F$

Donc F est stable par les combinaisons linéaires D'où $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

La Question : II) 2)

D'abord F est une partie non-vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient des matrices carrées d'ordre 2 dont l'élément $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fait partie. Soient $M = M(x,y)$ et $M' = M'(x',y')$ deux éléments de F .

$$M \times M' = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \frac{y'}{2} & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' - yy' & -2xy' - 2x'y \\ \frac{x'y}{2} + \frac{xy'}{2} & -yy' + xx' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -2(xy' + x'y) \\ \frac{(x'y + xy')}{2} & (xx' - yy') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy' ;\ x'y + xy') \in F$$

Ainsi : $(\forall\ M, M' \in F)\ ;\ M \times M' \in F$. Donc F est stable par la multiplication matricielle $\times$.
C-à-d : F est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

La Question : II) 3) a)

Etant donnée φ une application définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F qui , à tout complexe $(x + iy)$, associe la matrice $M(x,y)$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}^* & \longmapsto & F \\ (x+iy) & \longmapsto & M(x,y) \end{array}$$

L'application φ est un homomorphisme si et seulement si elle vérifie la chose suivante :
$(\forall z, z' \in \mathbb{C}^*)\ ;\ \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$
Soient $(x + iy)$ *et* $(x' + iy')$ deux nombres complexes non-nuls .

$$\varphi\big((x+iy) \times (x' + iy')\big) = \varphi\big((xx' - yy') + i(xy' + x'y)\big)$$
$$= M\big((xx' - yy') ; (xy' + x'y)\big)$$

Or, d'après le résultat de la question 2), On a vu que $M(x,y) \times M'(x',y') = M(xx' - yy' ;\ x'y + xy')$

C-à-d $\varphi(x + iy) \times \varphi(x' + iy') = M(x,y) \times M'(x',y')$
$$= M(xx' - yy' ;\ x'y + xy')$$
$$= \varphi\big((x + iy) \times (x' + iy')\big)$$

La Question : II) 3) b)

Pour montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$, il suffit de montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \longmapsto F^*$ est une bijection. Soit $M(a,b)$ un élément de F^* .
Donc $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$; $(a,b) \neq (0,0)$.
L'équation $\varphi(x + iy) = M(a,b)$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}^*$ et c'est le nombre complexe $a + ib$ car $\varphi(x + iy) = M(a,b)$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \neq 0 \\ y = b \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi ,On a montré la chose suivante :
$(\forall M(a,b) \in F)(\exists!\ (x + iy) \in \mathbb{C}^*)\ :\ \varphi(x + iy) = M(a,b)$.
D'où φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F^* .
C-à-d : $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$.

La Question : II) 3) c)

On a vu que l'application $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \longmapsto (F^*, \times)$ est un isomorphisme, Donc l'image du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ est le groupe $(F^*, \times)$.
En d'autres termes : $\varphi(\mathbb{C}^*, \times) = (F^*, \times)$
ou encore $(\varphi(\mathbb{C}^*), \times) = (F^*, \times)$. C-à-d que $(F^*, \times)$ est un groupe qui hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Comme $(1 + 0i)$ est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ alors $\varphi(1 + 0i) = M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ est l'élément neutre du groupe $(F^*, \times)$.

Comme le symétrique d'un élément $(x+iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$ Alors le symétrique de l'élément $M(x,y)$ dans F^* est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} ; \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

La Question : II) 4)

Pour montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :
1) $(F,+)$ est un groupe abélien d'élmnt neutre $(0,0)$
2) $\left((F\backslash\{M(0,0)\} ; \times)\right)$ est un groupe.
3) la loi × est distributive par rapport à la loi + dans F
4) la loi × est commutative dans F.

$(F,+)$ est un groupe commutatif puisque $(F,+)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.
Remarquer que $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $F \neq \emptyset$
et $M(x,y) - M(x',y') = M(x-x' ; y-y') \in F$

$(F\backslash\{M(0,0)\} ; \times)$ est un groupe abélien puisque c'est $(F^*,\times)$ qu'on a démontré dans 3)c).

La loi × est distributive par rapport à la loi + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Donc c'est la même chose dans F puisque F est une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La loi × est commutative dans F comme on l'avait démontré dans 3)c).

La conclusion : $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Rappel : du petit Théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $(a^{p-1}-1)$ est un multiple de p.
Autrement-dit, sous les mêmes conditions sur a et p, on écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$\begin{aligned} 13 \in \mathbb{P} \;&\Rightarrow\; a^{12} \equiv 1[13] \;;\; d'après\ Fermat \\ &\Rightarrow\; (a^{12})^{168} \equiv 1^{168}[13] \\ &\Rightarrow\; a^{2016} \equiv 1[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

On pose $x \wedge 13 = \delta$. comme 13 est un nombre premier alors : ou bien $\delta = 1$,ou bien $\delta = 13$. car les diviseurs de 13 sont $\{-13,-1,1,13\}$. pour montrer que $\delta = 1$ il suffit de réfuter le cas $\delta = 13$ .On le suppose vrai, alors $x \wedge 13 = 13$ C-à-d que 13 divise x D'où l'existence d'un certain x dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 13k$

Comme x est solution de l'équation (E) Alors $x^{2015} \equiv 2[13]$. D'où $(13k)^{2015} \equiv 2[13] \rightsquigarrow (1)$.
Or , $13 \equiv 0[13]$. Donc $(13k)^{2015} \equiv 0[13] \rightsquigarrow (2)$.
Par transitivité du signe $(\equiv)$, et en partant de (1) et (2) on conclut que $2 \equiv 0[13]$. C-à-d que 13 divise 2 (contradiction) Donc la proposition $\delta = 13$ qu'on a supposé être vraie, a abouti à une contradiction (13 divise 2) . Ce qui signifie qu'elle est fausse, Alors $\delta \neq 13$. Ainsi $x \wedge 13 = \delta = 1$.
C-à-d que x et 13 sont premiers entre eux .

La Question : I) 2) b)

Soit x une solution de l'équation (E).

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E) &\Rightarrow\; x \wedge 13 = 1 ,\; selon\ I)2)a) \\ &\Rightarrow\; x^{2016} \equiv 1[13] \;(3) \;;\; d'après\ I)1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\ est\ solution\ de\ (E) \;&\Rightarrow\; x^{2015} \equiv 2[13] \\ &\Rightarrow\; x \cdot x^{2015} \equiv 2x[13] \rightsquigarrow (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)\ et\ (4) \;&\Rightarrow\; 2x \equiv 1[13] \\ &\Rightarrow\; \begin{cases} 2x \equiv 1[13] \\ 14 \equiv 1[13] \;;\; solution\ particulière \end{cases} \\ &\Rightarrow\; 2x - 14 \equiv 0[13] \\ &\Rightarrow\; 2(x-7) \equiv 0[13] \\ &\Rightarrow\; (x-7) \equiv 0[13] \;; d'après\ Gauss \\ &\Rightarrow\; x \equiv 7[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

Pour résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer l'équivalence suivante :
x est solution de $(E) \;\Leftrightarrow\; x = 7 + 13k \;; k \in \mathbb{Z}$.
Pour l'implication directe, si x est solution de (E), alors d'après la question 2)b) On a : $x \equiv 7[13]$ d'où $x = 13k + 7 \;;\; k \in \mathbb{Z}$. Pour l'implication inverse, on se sert de la compatibilité de la congruence modulo avec la multiplication :

$$\begin{aligned} x = 7 + 13k \;&\Rightarrow\; x \equiv 7[13] \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv 7^{2015}[13] \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv (7^3)^{671} \times 7^2[13] \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv (343)^{671} \times 49\,[13] \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv 5^{671} \times 10[13]\ car \left|\begin{matrix} 343 \equiv 5[13] \\ 49 \equiv 10[13] \end{matrix}\right. \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv (5^2)^{335} \times 5^1 \times 10[13] \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv 25^{335} \times 50[13] \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv (-1)^{335} \times 11[13]\ car \left|\begin{matrix} 25 \equiv -1[13] \\ 50 \equiv 11[13] \end{matrix}\right. \\ &\Rightarrow\; x^{2015} \equiv -11[13] \\ &\Rightarrow\; \boxed{x^{2015} \equiv 2[13]}\ car -11 \equiv 2[13] \end{aligned}$$

D'où l'implication suivante :

$$\left|\begin{matrix} x = 7 + 13k \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right. \Rightarrow\; x\ est\ solution\ de\ (E)\ dans\ \mathbb{Z}$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par $\mathcal{S} = \{7 + 13k \;;\; k \in \mathbb{Z}\}$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

On tire au hasard une boule portante le chiffre n. pour que n soit une solution de l'équation (E), il suffit qu'il s'écrit sous la forme $7+13k$ avec k est un entier relatif et $1 \leq n \leq 50$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 1 \leq 7+13k \leq 50 \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad -6 \leq 13k \leq 43 \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-6}{13} \leq k \leq \frac{43}{13} \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \quad 0{,}46 \leq k \leq 3{,}3 \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \quad k\,\epsilon\,[-0{,}46\,;3{,}3] \cap \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \quad k\,\epsilon\,\{0\,;1\,;2\,;3\,\} \\
&\Rightarrow \quad (7+13k)\,\epsilon\,\{7\,;20\,;33\,;46\,\}
\end{aligned}$$

La Question : II) 2)

On considère l'événement A défini comme suit :

$$A = \text{" } tirer\ une\ boule\ numérot\acute{e}\ 7, 20, 33\ ou\ 46 \text{"}$$

Signalons que l'hypothèse d'équiprobabilité est bien vérifiée puisqu'on a affaire à un tirage au hasard d'une boule parmi cinquante autres toutes identiques. D'où $p(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_{50}^1} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

Rappel : soit A un événement, de probabilité p , dans une expérience aléatoire. Si A est répété indépendamment n fois, alors la probabilité correspondante à la vérification de A exactement k fois est donnée par $p_K = C_n^K \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ fin.
A est un événement de probabilité $\frac{2}{25}$.
Cet événement est répété trois fois.
Ainsi, la probabilité correspondante à l'obtention de A exactement trois fois est donnée par :
$p_3 = C_3^2 \times (p(A))^2 \times (1-p(A))^{3-2} = \frac{276}{15625}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1+i)^2 - 4(2+2i) \\
&= 1 + 2i - 1 - 8 - 8i \\
&= 1 - 6i - 9 \\
&= 1^2 - 2(1)(3i) + (3i)^2 \\
&= (1-3i)^2
\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

D'après la question 1)a), On remarque que $(1-3i)$ est une racine carrée du déterminant Δ . Ainsi, les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ seront donc $z_1\ et\ z_2$ définies comme suit :

$$\left| \begin{aligned} z_1 &= \frac{(1+i)-(1-3i)}{2} = 2i \\ z_2 &= \frac{(1+i)+(1-3i)}{2} = 1-i \end{aligned} \right.$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} &= \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i - 1 \\
&\Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |i-1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\
&\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}e^{\left(\frac{i3\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$On\ a:\ \ aff(A) = z_1 \quad et \quad aff(B) = z_2$$

E est le milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad aff(E) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{z_1 + z_2}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{2i + 1 - 1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Rappel : Soit $r_{(A,\theta)} : \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \ \mapsto \ (\mathcal{P}) \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{array}$
une rotation dans le plan complexe .
$r(M) = M' \ \Leftrightarrow \ (z' - z_A) = e^{i\theta}(z - z_A)$

On a : $A(z_1), B(z_2), E\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\ et\ C(c)$ et on considère la rotation r dans le plan complexe définie par :

$$r_{\left(A,\frac{-\pi}{2}\right)} : \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \ \mapsto \ (\mathcal{P}) \\ M(z) \ \mapsto M'(z') \end{array}$$

$$\begin{aligned}
r(E) = c \ &\Leftrightarrow \ (z_c - z_1) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_E - z_1) \\
&\Leftrightarrow \ (c - 2i) = -i\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 2i\right) \\
&\Leftrightarrow \ c = 2i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 2 \\
&\Leftrightarrow \ c = \frac{3i}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

La Question : 2) c)

$$On\ a\ :\ \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$$
$$=\left(\frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{\frac{-5}{2}}\right)\times\left(\frac{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}i-2i}{1-i-2i}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{-5}{2}i}{\frac{-5}{2}}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)\times\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)\times\left(\frac{1+3i}{1+3i}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{3+9i+i-3}{1-(-9)}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{10i}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

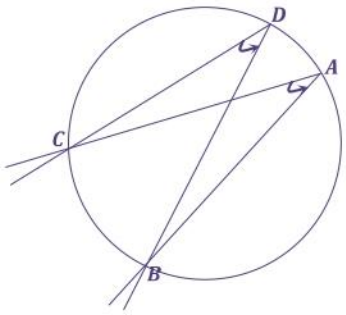
Rappel : soient $A(z_A)\,, B(z_B)\,, C(z_C)\ et\ D(z_D)$ quatre points dans le plan complexe.
Si la quantité $\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)\times\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)$ est un nombre réel $\left(\arg\left(\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)\times\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\right)\equiv 0[\pi]\right)$, Alors, ou bien les 4 points sont colinéaires, Ou bien ils sont cocycliques .
Fin du rappel.

$$On\ a\ :\ \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)=\frac{1}{2}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\times\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)+\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\ [\pi]$$

Si A, B et D sont colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ le sont.
Donc $(\exists k\epsilon\mathbb{R})$; $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
C-à-d : $(z_b-z_A)=k(z_c-z_A)$.
C-à-d : $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\epsilon\ \mathbb{R}\ \rightsquigarrow\ (*)$

$$Or\,,\quad \frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}=\left(\frac{1-i-2i}{\frac{-3}{2}+\frac{3i}{2}-2i}\right)=\left(\frac{1-3i}{\frac{-3}{2}-\frac{i}{2}}\right)$$
$$=-2\left(\frac{1-3i}{3+i}\right)\times\left(\frac{3-i}{3-i}\right)$$
$$=-2\left(\frac{3-i-9i-3}{9+1}\right)$$
$$=\frac{-1}{5}(-10i)=2i\ \epsilon\ i\mathbb{R}$$

Ce qui est en contradiction avec $(*)$.
D'où A , B et C ne sont pas colinéaires .
de même pour A, B et D. Ainsi, comme ces 4 points ne sont pas colinéaires, alors ils sont cocycliques.



$$\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\ [\pi]$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$$
$$=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(+\infty)}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}\right)$$
$$=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(-\infty)}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

La Question : 1) b)

On a $\frac{-3}{2}(x-n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, car c'est une fonction affine. Donc $e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier car c'est une composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{R}$. d'où $1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ Ainsi $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (toujours positive) . Soit $x\ \epsilon\ \mathbb{R}$:

$$f_n'(x)=\frac{-\left(e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)'}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}=\frac{-\left(\frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

La Question : 1) c)

$$On\ a\ :\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_n'(x) = \left(\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}\right)$$

$f_n'(x)$ est une quantité positive sur $\mathbb{R}$ comme étant une quotient de deux quantités strictement positives. Ainsi : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_n'(x) > 0$
D'où f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La Question : 2) a)

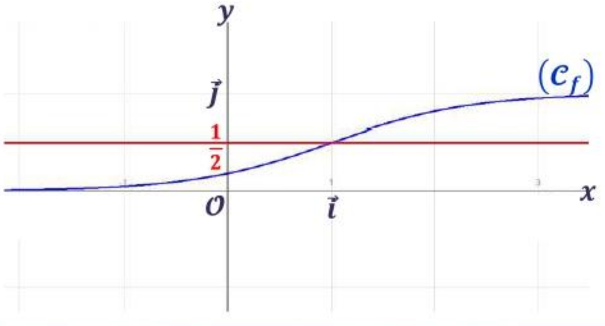
Rappel : Soit D_f le domaine de définition d'une fonction réelle f et soit $A(\alpha,\beta)$ un point dans le plan réel . On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à A si les deux assertions suivantes sont vérifiées :
$\left|\begin{array}{l}(\forall\, x\,\epsilon\, D_f)\ ;\ (\alpha+x)\,\epsilon\, D_f\ \ et\ \ (\alpha-x)\,\epsilon\, D_f \\ (\forall\, x\,\epsilon\, D_f)\ ;\ f(\alpha-x) = f(\alpha+x)\end{array}\right.$ Fin du rappel.
On a f_n est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors on aura toujours $(n-x)\,\epsilon\,\mathbb{R}\ \ et\ \ (n+x)\,\epsilon\,\mathbb{R}$ à partir du moment où x appartient à $\mathbb{R}$ quelquesoit n dans $\mathbb{N}$. soit $n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$

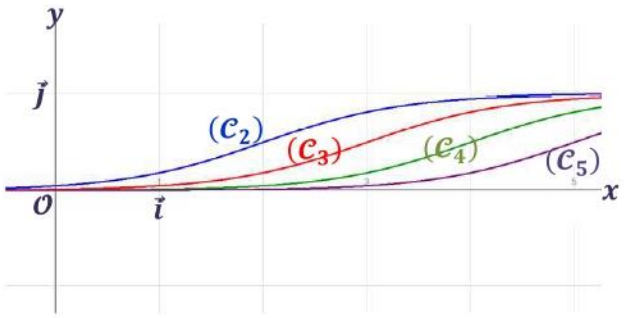
$$\begin{aligned} f_n(n-x)+f_n(n+x) &= \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(n-x-n)}} + \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(n+x-n)}} \\ &= \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}x}} + \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}x}} \\ &= \frac{\left(1+e^{\frac{-3}{2}x}\right)+\left(1+e^{\frac{3}{2}x}\right)}{\left(1+e^{\frac{3}{2}x}\right)\left(1+e^{\frac{-3}{2}x}\right)} \\ &= \frac{2+e^{\frac{-3}{2}x}+e^{\frac{3}{2}x}}{2+e^{\frac{-3}{2}x}+e^{\frac{3}{2}x}} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $f_n(n-x)+f_n(n+x) = 2\times\frac{1}{2}$ Donc la courbe representant f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est symetrique par rapport à $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$

La Question : 2) b)

La représentation graphique de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ representant la fonction $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}$ dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.





La Question : 2) c)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire définie par l'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et les droites d'équations : $x=0\,, x=1\ \ et\ \ y=0$
$\mathcal{A} = \int_0^1 |f_1(x)|\,dx = \int_0^1 f_1(x)\,dx$ car f_1 est positive sur $[0,1]$. par un procédé de changement de variables, on pose $t = e^{\frac{-3}{2}(x-1)}$:

$$\frac{dt}{dx} = \left(e^{\frac{-3}{2}(x-1)}\right)' = \frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-1)} = \frac{-3t}{2}$$

$$Ainsi\ :\ dx = \left(\frac{-2}{3}\right)\frac{dt}{t}$$

$$On\ a\ aussi\ :\ \left|\begin{array}{l} x=0 \iff t=e^{\frac{3}{2}} \\ x=1 \iff t=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \int_0^1\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}\right)dx &= \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{1+t}\right)\left(\frac{-2dt}{3t}\right) \\ &= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t(t+1)}\right)dt \\ &= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t}\right)dt + \frac{2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \frac{-2}{3}[\ln|t|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1 + \frac{2}{3}[\ln|t+1|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1 \\ &= \frac{-2}{3}\left(0-\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\ln 2 - \ln\left(1+e^{\frac{3}{2}}\right)\right) \\ &= 1+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{1+e^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &\approx 0{,}327 \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit g_n la fonction définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x, associe son image $(f_n(x)-x)$.

$$\begin{array}{rccl} g_n\ : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x)-x \end{array}$$

$g_n(x)$ est continue et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f_n(x)$ et x le sont.

$$g_n'(x) = f_n'(x) - 1 = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1$$

$$= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - \left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - 1 - 2e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - e^{-3(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} + 1 + e^{-3(x-n)}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0$$

Donc : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $g_n'(x) < 0$ d'où g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors comme g_n est continue et elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$g_n(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g_n(x) \; ; \; \lim_{x\to-\infty} g_n(x)\right[= \mathbb{R}$$

En réalité, g_n est une bijection de n'importe quel intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $g_n(I)$.
On pose $I =]0,n[\subset \mathbb{R}$, Alors $g_n :]0,n[\mapsto g_n(]0,n[)$ est une bijection.

$$g_n(]0,n[) = \left]\lim_{x\to n^-} g_n(x) \; ; \; \lim_{x\to 0^+} g_n(x)\right[$$
$$= \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$$

c-à-d $g_n :]0,n[\mapsto \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$ est une bijection .
Et d'après la définition d'une bijection on conclut que :

$$\left(\forall\, y \,\epsilon \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[\right), (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) : g_n(u_n) = y$$

En particulier, pour $y = 0$ (car $\frac{1}{2} - n < 0 < \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}$)
On écrit : $0 \,\epsilon \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$

$$\Rightarrow \; (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) \; : \; g_n(u_n) = 0$$
$$\Rightarrow \; (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) \; : \; f_n(u_n) - u_n = 0$$
$$\Rightarrow \; (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) \; : \; f_n(u_n) = u_n$$

C'est l'élégance qui m'a conduit à répondre ainsi. Sinon, si vous aimeriez être typique, vous pouvez répondre comme suit : On pose $g_n(x) = f_n(x) - n$. la fonction g_n est continue sur $]0,n[$ il est trop facile de démontrer que $g_n(0) \times g_n(n) < 0$ Donc d'après le TVI on écrit : $\exists\, u_n \,\epsilon\,]0,n[$; $g_n(u_n) = 0$
comme g_n est continue et est strictement décroissante ($g_n'(x) < 0$) Alors u_n est unique (g_n bijective) . D'où : $\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[$; $f_n(u_n) = u_n$

La Question : 3) b)

$$-1 < 0 \;\Rightarrow\; x - n - 1 < x - n$$
$$\Rightarrow\; \frac{-3}{2}(x-n-1) > \frac{-3}{2}(x-n)$$
$$\Rightarrow\; e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)} > e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$$
$$\Rightarrow\; 1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)} > 1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}} < \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$$
$$\Rightarrow\; f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

La Question : 3) c)

$$n \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \;\Rightarrow\; u_n < n$$
$$\Rightarrow\; f_n(u_n) < f_n(n) \; ; \; car\ f_n\ est\ \nearrow$$
$$\Rightarrow\; u_n < \frac{1}{2} \; ; \; car \left| \begin{array}{l} f_n(u_n) = u_n \\ f_n(n) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 < u_n < \frac{1}{2} \\ 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow\; (u_{n+1} - u_n) < 1$$
$$\Rightarrow\; u_{n+1} - 1 < u_n$$
$$\Rightarrow\; u_{n+1} - 1 - n < u_n - n$$
$$\Rightarrow\; \frac{-3}{2}(u_{n+1} - (1+n)) > \frac{-3}{2}(u_n - n)$$
$$\Rightarrow\; e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1}-(1+n))} > e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1}-(1+n))}} < \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}}$$
$$\Rightarrow\; f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_n)$$
$$\Rightarrow\; u_{n+1} < u_n \; ; \; car \left| \begin{array}{l} f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} \\ f_n(u_n) = u_n \end{array} \right.$$

D'où : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} < u_n$ C-à-d $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante et comme elle est minorée par 0 (car $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n < \frac{1}{2}$).
Alors elle est convergente.

La Question : 3) d)

On part du fait que $f_n(u_n) = u_n$
C-à-d : $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}} = u_n$. par passage aux limites, on retrouve bien :

$$\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}}\right) = \lim_{n\infty}(u_n)$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(l-\infty)}} = l$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+e^{+\infty}} = l$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+\infty} = l$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{+\infty} = l$$

$$\Rightarrow \quad 0 = l$$

$$D'où\ finalement\ :\ \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On démontre la parité de la fonction g à l'aide d'un procédé de changement de variable.

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt$$

$$On\ pose\ :\ l = -t \ \Rightarrow\ dt = -dl$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\cos t}{t} = \dfrac{\cos(-l)}{-l} = \dfrac{\cos l}{-l} = \dfrac{-\cos l}{l} \\ t = -x \ \Leftrightarrow\ l = x \\ t = -3x \ \Leftrightarrow\ l = 3x \end{array} \right.$$

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \int_{x}^{3x} \left(\frac{-\cos l}{l}\right)(-dl)$$

$$= \int_{x}^{3x} \left(\frac{\cos l}{l}\right) dl = g(x)$$

$$= \int_{x}^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \ ; \quad \begin{array}{c} Si\ vous\ n'êtes\ pas\ dérrangés \\ t\ et\ l\ sont\ deux\ variables\ muettes \end{array}$$

$$= g(x)$$

Comme $g(-x) = g(x)$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}^*$ Alors g est une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$: C-à-d la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La Question : 2)

Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\cos t}{t}$ et soit a un élément de $]0,+\infty[$. la fonction φ est bien définie et est continue sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions toutes continues sur $]0,+\infty[$. Donc φ admet des primitives sur $]0,+\infty[$. En particulier, φ admet une primitive ψ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en a et qui est définie comme suit :
$\begin{cases} \psi(x) = \int_a^x \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$ la fonction ψ est dérivables et admet φ comme dérivée sur $]0,+\infty[$.
C-à-d : $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x} = \varphi(x)$; $\forall x > 0$.
ou encore : $\frac{d}{dt}\left(\int_a^x \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt\right) = \frac{\cos x}{x}$.

Et voici un récapitulatif :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= \int_x^{a} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= -\int_a^{x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= -\psi(x) + \psi(3x) \\ &= \psi(3x) - \psi(x) \end{aligned}$$

ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$, Donc $\psi(3x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions toutes définies et dérivables sur $]0,+\infty[$. Donc $x \mapsto \psi(3x) - \psi(x)$ est dérivable comme étant différence de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
Ainsi : $g'(x) = \big(\psi(3x) - \psi(x)\big)'$

$$\begin{aligned} &= 3x \cdot \psi'(3x) - \psi'(x) \\ &= 3x \cdot \varphi(3x) - \varphi(x) \\ &= 3x \cdot \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit x un élément de $]0,+\infty[$,

$$g(x) = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \int_x^{3x} \Bigg(\underbrace{\cos t}_{v'(t)}\Bigg)\Bigg(\underbrace{\frac{1}{t}}_{u(t)}\Bigg) dt$$

$$\begin{aligned} &= [u(t) \times v(t)]_x^{3x} - \int_x^{3x} u'(t) \times v(t)\, dt \\ &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{-\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x}\right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{3x}\right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soit x un élément de $]0,\infty[$ On a : $|\sin t| \leq 1 \ \rightsquigarrow$ (1)
Aussi : $x \leq t \Rightarrow x^2 \leq t^2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \ \rightsquigarrow$ (2)

$$(1) \times (2) \ \Rightarrow \ \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1}{x^2}\right) dt$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2}\right) \int_x^{3x} 1\, dt$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2}\right)(3x - x)$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \frac{2}{x}$$

Récapitulatif :

$$\begin{aligned}|g(x)| &= \left|\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)dt\right| \\ &= \left|\left(\frac{\sin(3x)-3\sin x}{3x}\right)+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right| \\ &= \left|\frac{\sin 3x}{3x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right| \\ &\leq \left|\frac{\sin 3x}{3x}\right|+\left|\frac{\sin x}{x}\right|+\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{3x}\right|+\left|\frac{1}{x}\right|+\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt \\ &\leq \frac{1}{3x}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x} \\ &\leq \frac{10}{3x}\end{aligned}$$

D'où : $(\forall x>0)$; $|g(x)| \leq \frac{10}{3x}$

$$comme \;:\; |g(x)| \leq \frac{10}{3x}$$

$$Alors \;:\; \underbrace{0}_{\substack{x\to+\infty \\ 0}} \leq |g(x)| \leq \underbrace{\left(\frac{10}{3x}\right)}_{x\to+\infty}$$

$$ou\ encore \;:\; \underbrace{\left(\frac{-10}{3x}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ 0}} \leq g(x) \leq \underbrace{\left(\frac{10}{3x}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ 0}}$$

$$D'où : \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

La Question : 4) a)

D'une part : $\cos t \leq 1 \;\Rightarrow\; 1-\cos t \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos t}{t} \geq 0 \;;\; car \left| \begin{array}{l} x \leq t \leq 3x \\ x>0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (1) : \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \geq 0 \;;\; car\ 0<x<3x$$

D'autre part :

$$1-\cos t \leq t \;\Rightarrow\; \frac{1-\cos t}{t} \leq 1 \;;\; car\ t \geq x > 0$$

$$\Rightarrow \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq \int_x^{3x} 1\,dt$$

Car $x<3x$ et la fonction $\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

$$\Rightarrow \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq 2x$$

$$(1)\ et\ (2) \;\Rightarrow\; (\forall x>0) \;;\; 0 \leq \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq 2x$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned}\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt &= \int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)dt - \int_x^{3x}\left(\frac{1}{t}\right)dt \\ &= g(x) - [\ln|t|]_x^{3x} \\ &= g(x) - (\ln 3x - \ln x) \;;\; x\neq 0 \\ &= g(x) - \ln\left(\frac{3x}{x}\right) \;;\; x \neq 0 \\ &= g(x) - \ln 3\end{aligned}$$

La Question : 4) c)

$$(\forall x>0) \;;\; \underbrace{0}_{\substack{x\to 0^+ \\ 0}} \leq \int_x^{2x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt \leq \underbrace{2x}_{\substack{x\to 0^+ \\ 0}}$$

$$Donc \;:\; \lim_{x\to0^+}\left(\int_x^{2x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\right) = 0$$

$$Aussi \;:\; \lim_{x\to0^+}\left(\int_x^{2x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt\right) = 0$$

$$comme \;:\; g(x)-\ln 3 = \int_x^{3x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt$$

$$Alors \;:\; \lim_{x\to0^+}(g(x)-\ln 3) = \lim_{x\to0^+}\left(\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt\right)$$

$$C-à-d \;:\; \lim_{x\to0^+}(g(x)-\ln 3) = 0$$

$$Ou\ encore \;:\; \lim_{x\to0^+} g(x) = \ln 3$$