2016 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

Tout d'abord, E est une partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ *et* $M(0,0) = \mathcal{O} \in E$.
soient (x,y) et (a,b) deux éléments de E :

$$M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y-a-b & 0 & -2y+2b \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & x-y-a+b \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a\ ;\ y-b) \in E \ \ car \ \left| \begin{array}{l} (x-a) \in \mathbb{R} \\ (y-b) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

D'où : $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2)

$$M(x,y) \times M(x',y') =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx'-yy') + (xy'+yx') & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ (xy'+yx') & 0 & (xx'-yy') - (xy'+yx') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \in E\ ;\ car \left| \begin{array}{l} xx'-yy' \in \mathbb{R} \\ xy'+yx' \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La Question : 3) a)

Soient $z = x+iy$ et $z' = z' + iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ et soit φ l'application suivante :

$$\begin{array}{rl} \varphi :\ (\mathbb{C}^*,\times) & \longmapsto\ (E,\times) \\ z = x+iy & \longmapsto\ \varphi(z) = M(x,y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z \times z') &= \varphi\big((x+iy)(x'+iy')\big) \\ &= \varphi\big((xx'-yy') + i(xy'+yx')\big) \\ &= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \\ &= M(x,y) \times M(x',y')\ ;\ d'après\ 2) \\ &= \varphi(z) \times \varphi(z') \end{aligned}$$

Ainsi φ est 1 homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

La Question : 3) b)

Soit $M(a,b)$ un élément de E^* .
l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution $x+iy = a+ib$ Donc :
$(\forall M(a,b) \in E^*), (\exists!\ (x+iy) \in \mathbb{C}^*) :\ \varphi(x+iy) = M(a,b)$
c-à-d que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans E^* .
Dés lors : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.
comme φ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans E et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif, alors la structure algébrique de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sera transmise vers $(E^*,\times)$ via l'application φ.
$(\mathbb{C}^*,\times)$ groupe commutatif $\Rightarrow$ $(E^*,\times)$ Aussi .
$(1+i0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\times)$ $\Rightarrow$
$\varphi(1+i0) = M(1,0)$ est l'élément neutre pour $(E^*,\times)$

La Question : 4)

$(E,+,\times)$ est un groupe commutatif car :

$$car\ :\ \left| \begin{array}{l} \blacksquare\ (E,+)\ est\ un\ groupe \\ \blacksquare\ (E^*,\times)\ est\ un\ groupe\ commutatif \\ \blacksquare\ \times\ est\ distributive\ par\ rapport\ à + \\ \blacksquare\ \times\ est\ commutative\ dans\ E \end{array} \right.$$

La distributivité de × par rapport à + :

$$\begin{aligned} &M(a,b) \times \big(M(x,y) + M(x',y')\big) \\ &= M(a,b) \times M(x+x'\ ;\ y+y') \\ &= M\big(a(x+x') - b(y+y')\ ;\ a(y+y') + b(x+x')\big) \\ &= M(ax+ax'-by-by'\ ;\ ay+ay'+bx+bx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M(a,b) \times M(x,y) + M(a,b) \times M(x',y') \\ &= M(ax-by\ ;\ ay+bx) + M(ax'-by'\ ;\ ay'+bx') \\ &= M(ax-by+ax'-by'\ ;\ ay+bx+ay'+bx') \end{aligned}$$

Donc la distributivité à gauche est vérifiée.
Même procédé pour la distributivité à droite.
Pour la commutativité de × dans E , on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') &= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \\ &= M(xx'-yy'\ ;\ y'x+x'y) \\ &= M(x',y') \times M(x,y) \end{aligned}$$

La Question : 5) a)

$$A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

La Question : 5) b)

Soient $M(x,y)$ une matrice de E et $M(x',y')$ son symetrique dans E.

$$\Leftrightarrow\ M(x,y)\times M(x',y') = M(x',y')\times M(x,y) = I$$
$$\Leftrightarrow\ M(x,y)\times M(x',y') = I \ \ car\ \times\ est\ commutative$$
$$\Rightarrow\ A\times M(x,y)\times M(x',y') = A\times I = A$$
$$\Rightarrow\ \mathcal{O}\times M(x',y') = A$$
$$\Rightarrow\ \mathcal{O} = A$$
$$\Rightarrow\ 0 = 1\ ;\ c'est\ absurde$$

Donc $M(x,y)$ n'est pas inversible (n'admet pas de symetrique)

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} 173/(a^3+b^3) &\Rightarrow (a^3+b^3)\equiv 0[173] \\ &\Rightarrow a^3 \equiv -b^3[173] \\ &\Rightarrow (a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173] \\ &\Rightarrow a^{171}\equiv -b^{171}[173] \end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$\begin{aligned} 173/a &\Leftrightarrow 173/a^3\ ;\ 173\in\mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a^3\equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow (a^3+b^3)\equiv b^3[173] \\ &\Leftrightarrow b^3\equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow 173/b^3 \\ &\Leftrightarrow 173/b\ ;\ car\ 173\in\mathbb{P} \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

$$173/a \ \Rightarrow\ 173/b\ ;\ d'après\ 2)$$
$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}173/a\\173/b\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\ 173\ divise\ toute\ combinaison\ linéaire\ en\ a\ et\ b$$
$$\Rightarrow\ 173/(a+b)$$

La Question : I) 4) a)

Rappel du Théorème de Fermat :

$$\left|\begin{array}{l}p\in\mathbb{P}\\ a\wedge p = 1\end{array}\right. \ \Rightarrow\ a^{p-1}\equiv 1[p]$$

Comme 173 ne divise pas le nombre a, alors 173 ne divise pas b à cause de l'équivalence de la question 2) : $173/a\ \Leftrightarrow\ 173/b$

On peut Donc écrire : $\left|\begin{array}{l}173\wedge a = 1\\173\wedge b = 1\end{array}\right.$

Ainsi d'après Fermat : $\begin{cases}a^{172}\equiv 1[173]\\ a^{172}\equiv 1[173]\end{cases}$

D'où : $a^{172}\equiv b^{172}[173]$

La Question : I) 4) b)

$$\begin{cases}a^{171}\equiv -b^{171}[173]\\ a^{172}\equiv b^{172}[173]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a(a^{171})\equiv -a(b^{171})[173]\\ a^{172}\equiv b^{172}[173]\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}a^{172}\equiv -a(b^{171})[173]\\ a^{172}\equiv b^{172}[173]\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ b^{172}\equiv -a(b^{171})[173]\ ;\ la\ transitivité$$
$$\Rightarrow\ 173/b^{171}(a+b)$$
$$\Rightarrow\ b^{171}(a+b)\equiv 0[173]$$

La Question : I) 4) c)

$$\begin{aligned} 173\wedge b = 1 &\Rightarrow 173\wedge b^{171} = 1 \\ &\Rightarrow 173/(a+b)\ ;\ car \left|\begin{array}{c}173/b^{171}(a+b)\\ c'est\ Gauss\end{array}\right. \end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\begin{aligned} (x,y)\ est\ solution\ de\ (E) &\Rightarrow x^3+y^3 = 173(xy+1) \\ &\Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = 173(xy+1) \\ &\Rightarrow 173k((x-y)^2+xy) = 173(xy+1) \\ &\Rightarrow k(x-y)^2+kxy = xy+1 \\ &\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy = 1 \end{aligned}$$

La Question : II) 2)

$$k\in\mathbb{N}^*\ \Rightarrow\ k\geq 1\ \Rightarrow \left|\begin{array}{l}ou\ bien\ k=1\\ ou\ bien\ k>1\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} Si\ k>1 &\Rightarrow (k-1)>0 \\ &\Rightarrow \left|\begin{array}{l}et\ (k-1)xy>0\\ et\ k(x-y)^2>1\ ;\ x\neq y\end{array}\right. \\ &\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy>1 \\ &\Rightarrow 1>1\ ;\ c'est\ absurde \\ &\Rightarrow k=1\ ;\ c'est\ le\ cas\ restant \\ &\Rightarrow \begin{cases}x+y = 173\times 1\\ 1(x-y)^2+(1-1)xy = 1\end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases}x+y = 173\\ (x-y)^2 = 1\end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \text{ou bien } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } (x,y)=(87,86) \\ \text{ou bien } (x,y)=(86,87) \end{cases}$$

soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N}^{2*}$. Le résultat est :

$$(x,y)\,\epsilon\,\mathcal{S} \;\Rightarrow\; \begin{cases} ou\ bien\ (x,y)=(87,86) \\ ou\ bien\ (x,y)=(86,87) \end{cases}$$

Inversement : $\left| \begin{array}{l} 87^3+86^3=1294559 \\ 173(87\times 86+1)=1294559 \end{array} \right.$

Ainsi : $87^3+86^3=173(87\times 86+1)$.
C-à-d que : $(87,86)\,\epsilon\,\mathcal{S}\ et\ (86,87)\,\epsilon\,\mathcal{S}$

La conclusion : $\mathcal{S}=\{(87,86)\,;\,(86,87)\}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

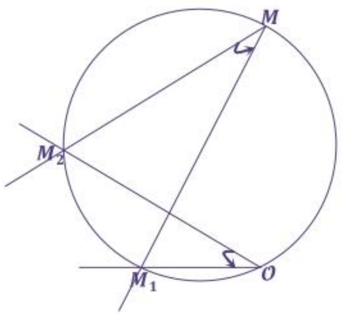
$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\left(\frac{z_1-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}{z_2-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}\right)\times\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$
$$=\frac{z_1(z_1+z_2)-2z_1z_2}{z_2(z_1+z_2)-2z_1z_2}\times\frac{z_2}{z_1}$$
$$=\frac{z_1}{z_2}\times\frac{z_1+z_2-2z_2}{z_1+z_2-2z_1}\times\frac{z_2}{z_1}$$
$$=\frac{z_1+z_2-2z_2}{z_1+z_2-2z_1}$$
$$=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_1}$$
$$=-1$$

La Question : 1) b)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)\times\left(\frac{z_{M_2}-z_{\mathcal{O}}}{z_{M_1}-z_{\mathcal{O}}}\right)=-1\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ M,M_1,M_2\ et\ \mathcal{O}\ sont\ colinéaires \\ ou\ bien\ M,M_1,M_2\ et\ \mathcal{O}\ sont\ cocycliques \end{cases}$$

$\mathcal{O},M_1\ et\ M_2$ Sont supposés différents deux à deux dans l'énoncé . Alors $M,M_1,M_2\ et\ \mathcal{O}$ ne peuvent être colinéaires. D'où les 4 points sont cocycliques .
Autrement-dit : M appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathcal{O}M_1M_2$



$$\left(\widehat{\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{\mathcal{O}M_2},\overrightarrow{\mathcal{O}M_1}}\right)\ [\pi]$$

La Question : 2)

$$z_2=\overline{z_1} \;\Rightarrow\; \bar{z}=\overline{\left(\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}\right)}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_1}}}{\overline{z_1}+\overline{\overline{z_1}}}$$
$$=\frac{2\overline{z_1}z_1}{\overline{z_1}+z_1}=\frac{2|z_1|^2}{2\Re e(z_1)}\,\epsilon\,\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow\; z\,\epsilon\,\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow\; M\,\epsilon\,(l'axe\ réelle)$$

La Question : 3) a)

Soit r la rotation définie comme suit :

$$\begin{aligned} r(\theta,\alpha)\ :\ (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned}$$

$$r(M_1)=M_2 \;\Leftrightarrow\; \left(z_{M_2}-z_{\mathcal{O}}\right)=e^{i\alpha}\left(z_{M_1}-z_{\mathcal{O}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\; z_2=e^{i\alpha}z_1$$

La Question : 3) b)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1 \;\Leftrightarrow\; \frac{z_1-z}{z_2-z}=\frac{-z_1}{z_2}$$
$$\Rightarrow\; \left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=\left|\frac{-z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{-1\cdot z_1}{e^{i\alpha}\cdot z_1}\right|=\left|e^{-i\alpha}\right|=1$$
$$\Rightarrow\; \left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=1$$
$$\Rightarrow\; |z_1-z|=|z_2-z|$$
$$\Rightarrow\; MM_1=MM_2$$
$$\Rightarrow\; M\ \epsilon\ la\ médiatrice\ de\ [M_1M_2]$$

La Question : 4) a)

$$\left| \begin{array}{l} z_1\ et\ z_2\ sont \\ solutions\ de\ (G) \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{--\left(e^{i\theta}+1\right)}{6} \\ z_1z_2=\dfrac{e^{i\theta}-1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{2\left(e^{i\theta}-1\right)}{e^{i\theta}+1}$$

La Question : 4) b)

Rappel des formules d'Euler :

$$\begin{vmatrix} e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \end{vmatrix}.$$

$$z = 2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right) = 2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{i0}}{e^{i\theta}+e^{i0}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2i\sin\left(\frac{\theta-0}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta-0}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}\right)$$

$$= 2i\cdot\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= 2e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i0}$$

$$= 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}$$

$$= \left[2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right);\frac{\pi}{2}\right]$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant la composée de deux fonctions dérivables bien définies sur $\mathbb{R}$ $\left(e^{-\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}\right)$. On peut ainsi appliquer le **TAF** sur n'importe quel intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel strictement positif :

$$\begin{vmatrix} \varphi \text{ est continue sur } [0,x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0,x[\end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow \exists\, \theta \in]0,x[\ ;\ \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = \varphi'(\theta)$$

$$\Rightarrow 0 < \theta < x\ ;\ \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right) = -e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow 0 < \theta < x\ ;\ \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) = e^{\theta}$$

La Question : I) 2) a)

$$\theta > 0 \Rightarrow e^{\theta} > 1 \Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}} > 1$$

$$\Rightarrow x > 1 - e^{-x} > 0\ ;\ car\ x > 0$$

La Question : I) 2) b)

$$\theta < x \Rightarrow e^{\theta} < e^{x} \Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}} < e^{x}$$

$$\Rightarrow x < e^{x} - 1\ ;\ \begin{vmatrix} avec\ 1 - e^{-x} > 0 \\ car\ x > 0 \end{vmatrix}.$$

$$\Rightarrow x + 1 < e^{x}$$

La Question : I) 2) c)

$$0 < \theta < x \Rightarrow e^{0} < e^{\theta} < e^{x}\ ; Exp\ est\ continue\ et\ \nearrow$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{1-e^{-x}} < e^{x}$$

$$\Rightarrow \ln 1 < \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) < \ln(e^{x})$$

$$\ln\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}_*^+\ est\ \nearrow$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x}}{\left(\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}\right)} = \frac{\lim_{x\to 0^+} e^{x}}{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{x}-e^{0}}{x-0}\right)}$$

$$= \frac{e^{0}}{(e^{x})'_{/x=0}} = \frac{e^{0}}{e^{0}} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0 .

La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

Donc la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote pour $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

La Question : II) 2) a)

Soient $t > 0\ et\ x > 0$.

$$\Rightarrow 1 - t < e^{-t}\ ;\ d'après\ I)2)a)$$

$$\Rightarrow \int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x (e^{-t})\,dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale $\int_0^x dt$ car ces deux quantités sont intégrables (la continuité est vérifiée). L'orde n'a pas changé à cause de $0 < x$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x < -[e^{-t}]_0^x$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{x^2}{2}\right) < -e^{-x}+1 \ ; \ (1)$$

De même, Soient $t>0$ *et* $x>0$.

$$\Rightarrow \ 0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \ ; \ d'après \ I)2)c)$$

$$\Rightarrow \ e^0 < e^{\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \ 1<\frac{xe^x}{e^x-1}$$

$$\Rightarrow \ 1<\frac{x\cdot e^x}{e^x\cdot(1-e^{-x})}$$

$$\Rightarrow \ 1<\frac{x}{1-e^{-x}}$$

On multiplie les deux côtés de cette inégalité par le nombre positif $(1-e^{-x})$, il est positif car $x>0$.

$$\Rightarrow \ (1-e^{-x})<x$$
$$\Rightarrow \ (2): \ -e^{-x}+1<x \ \ ; \ joliment$$

$$(1) \ et \ (2) \Rightarrow \ \forall x>0 \ ; \ x-\frac{x^2}{2}<-e^{-x}+1<x$$

Pour $x=0$, On a : $x-\frac{x^2}{2}=-e^{-x}+1=x=0$ $(\blacksquare)$

On écrit finalement :

$$(\forall x\geq 0) \ ; \quad x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1\leq x \ \ (\blacksquare)$$

La Question : II) 2) b)

a-t-On le droit d'intégrer la formule ■ ?
Oui, effectivement, On a le droit de le faire car les trois quantités sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tout entier . Et $x>0$ gardera le sens de l'ordre inchangeable .

$$(\blacksquare) \Rightarrow \quad x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1\leq x$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^t\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx < \int_0^t(-e^{-x}+1)\,dx < \int_0^t x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+cte\right]_0^t < [e^{-x}+x+cte]_0^t < \left[\frac{x^2}{2}+cte\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right)<(e^{-t}+t-1)<\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad ; \ t>0$$

Cette inégalité reste vraie pour $t=0$.
Donc finalement on écrit :

$$(\forall t\geq 0) \ : \ \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right)<(e^{-t}+t-1)<\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

La Question : II) 3) a)

Soit $x>0$:

$$\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)-1}{x}=\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$
$$=\frac{xe^x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right)}{x(e^x-1)}$$
$$=\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\cdot\left(\frac{xe^x-e^x+1}{x^2e^x}\right)$$
$$=\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\cdot\left(\frac{e^x}{e^x}\right)\cdot\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)f(x)$$

La Question : II) 3) b)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)\times\lim_{x\to 0^+}f(x)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

$$Mais \ pourquoi \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)=\frac{1}{2} \ ?$$

$$x\to 0^+ \ \Rightarrow \ x\geq 0$$
$$\Rightarrow \ \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\leq(e^{-x}+x-1)\leq\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\right)\leq\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right) \ ; \ x^2>0$$
$$\Rightarrow \ \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\right)}_{\xrightarrow{x\to 0^+}\ \frac{1}{2}}\leq\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)\leq\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\xrightarrow{x\to 0^+}\ \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$Ainsi \ : \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} f \ est \ dérivable \ à \ droite \\ en \ 0 \quad et \quad f_d'(0)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} (\mathcal{C}_f) \text{ admet la demi} - \text{droite } (\Delta) \\ \text{de coefficient directeur } \frac{1}{2} \text{ comme} \\ \text{tangente à droite en } (0,1) \\ (\Delta) : \ y = \frac{1}{2}x + f(0) \end{array} \right.$$

La Question : II) 4) a)

Comme $x \mapsto xe^x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables. Aussi la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme (différence de deux fonctions dérivables) ; et $\forall x > 0$; $e^x - 1 \neq 0$. Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right)' = \frac{(xe^x)'(e^x - 1) - (e^x - 1)' xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - (e^x)xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 + x)(e^x - 1) - xe^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x\big((1 + x)(e^x - 1) - xe^x\big)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(xe^x - x + e^x - 1 - xe^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

La Question : II) 4) b)

On a : $\left| \begin{array}{l} (e^x - 1)^2 \geq 0 \ ; \ toujours \\ e^x > 0 \ ; \ toujours \\ e^x > 1 + x \ ; \ II)2)b) \end{array} \right.$

$$Donc \ : \ \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} > 0 \ ; \ \forall x > 0$$

$$C - \text{à} - d \ : \ f'(x) > 0 \ ; \ \forall x > 0$$

$$C - \text{à} - d \quad f \ est \nearrow sur \ ]0,+\infty[\ ainsi \ sur \ [0,+\infty[$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit la proposition $P(n)$: $u_n > 0$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 > 0$. donc l'instance $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $P(n)$ est vraie .

$$\begin{aligned} P(n) \ est \ vraie \ &\Rightarrow \ u_n > 0 \\ &\Rightarrow \ f(u_n) > f(0) \ ; \ f \ est \nearrow [0,+\infty[\\ &\Rightarrow \ f(u_n) > 1 \\ &\Rightarrow \ \ln\big(f(u_n)\big) > \ln 1 \ ; \ \ln \ est \nearrow]0,+\infty[\\ &\Rightarrow \ u_{n+1} > 0 \\ &\Rightarrow \ P(n+1) \ est \ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi \ on \ a \ trouvé \ : \begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 0$

La Question : III) 2)

$$\begin{aligned} I)2)c) \ &\Rightarrow \ 0 < \ln(f(x)) < x \ ; \ \forall x > 0 \\ &\Rightarrow \ 0 < \ln\big(f(u_n)\big) < u_n \ ; \ car \ u_n > 0 \\ &\Rightarrow \ 0 < u_{n+1} < u_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \ est \ strictement \searrow \\ &\Rightarrow \ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \ converge \ car \ minorée \ par \ 0 \end{aligned}$$

La Question : III) 3)

f est une fonction définie sur $[0,+\infty[$.
On a d'après $I)2)c)$: $(\forall x > 0)$; $\ln(f(x)) < x$.
Autrement-dit : $\forall x \in]0,+\infty[$; $\ln(f(x)) \neq x$.
Mais $\ln(f(0)) = \ln 1 = 0$. Donc la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$ est 0 dans l'ensemble $]0,+\infty[\cup \{0\} = [0,+\infty[$. C-à-d dans $[0,+\infty[$.

Rappel : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$
Et soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 \in I$.
Si la suite $(u_n)_n$ converge vers la limite l , et $l \in I$
Alors $(l) = l$.
On pose $\forall x \in [0,+\infty[$; $\varphi(x) = \ln(f(x))$.
φ est continue sur $[0,+\infty[$ car c'est une composition de deux fonctions continues (f *et* $\ln$). Et $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.
On a aussi $\varphi([0,+\infty[) = \ln([1,+\infty[) = [0,+\infty[$.
Comme $(u_n)_n$ est convergente vers l alors d'après le rappel, la limite l vérifie $\varphi(l) = l$.
C-à-d : $\ln(f(l)) = l$. d'où $l = 0 = \lim_{n\infty}(u_n)$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$$On \ \ pose \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \ ; \ \forall x > 0$$

ψ *est* une fonction continue sur $]0, +\infty[$ comme étant une composition bien définie de trois fonctions continues.
On remarque que $(\forall x > 0)$; $\psi(x) > 0$.
Donc le signe de l'intégrale $\int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt$ depend de l'ordre entre $\ln 2$ *et* x. Si $x < \ln 2 \implies \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt < 0$.
Si $x > \ln 2 \implies \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt > 0$

La Question : 1) b)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$.
Alors f admet des primitives sur I . En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en 0 et qui vérifie : $\begin{cases} \forall x \in I \ ; \ \varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \ \ et \ \ \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I \ ; \ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$.
On a ψ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\ln 2 \in]0, +\infty[$
Alors ψ admet une primitive F qui s'annule en $\ln 2$
Avec : $\left| \begin{array}{l} \forall x > 0 \ ; \ F(x) = \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\,dt \ \ et \ \ F(\ln 2) = 0 \\ \forall x > 0 \ ; \ F'(x) = \psi(x) \end{array} \right.$.
Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Et $\forall x > 0 \ ; \ F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$.

La Question : 1) c)

$$\forall x > 0 \ ; \ F'(x) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$$

D'où F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La Question : 2) a)

On pose $u = \sqrt{e^x - 1}$. la fonction $u(t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions continues .

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} = \frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\Leftrightarrow \quad dt = \left(\frac{2u}{u^2 + 1}\right) du$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \ln 2 \ \Leftrightarrow \ u = 1 \\ t = x \ \Leftrightarrow \ u = \sqrt{e^x - 1} \\ u = \sqrt{e^x - 1} \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}} = \dfrac{1}{u} \end{array} \right.$$

L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\right) dt &= \int_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u}\right) \cdot \left(\frac{2u}{u^2 + 1}\right) \cdot du \\ &= 2 \int_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u^2 + 1}\right) du \\ &= 2[\arctan u]_{1}^{\sqrt{e^x - 1}} \\ &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \arctan(1)\right) \\ &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\,arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(2\,arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2\,arctan\left(\sqrt{e^0 - 1}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2\,arctan(0) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{-\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} F(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(2\,arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\left(\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t = \sqrt{e^x - 1}}} \arctan t\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

F est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $F(]0, +\infty[)$ car F est continue et est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F \ : \ ]0, +\infty[\ &\mapsto \ F(]0, +\infty[) \\ x \ &\mapsto \ \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\right) dt \end{aligned}$$

$$F(]0, +\infty[) = \left]\lim_{x \to 0^+} F(x) \ ; \ \lim_{x \to +\infty} F(x)\right[= \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{aligned} F \ : \ ]0, +\infty[\ &\mapsto \ \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x \ &\mapsto \ \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}\right) dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$F \; : \;]0,+\infty[\; \longmapsto \; \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \; \longmapsto \; 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

F est une bijection Alors :

$$\left(\forall\, y\, \epsilon \; \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\,\right)(\exists!\, x\, \epsilon \;]0,+\infty[\,) \; : \; y=f(x)$$

$$\left(soit\; y\, \epsilon \; \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\,\right)(alors\; \exists!\, x\, \epsilon \;]0,+\infty[\,) \; : \; y=f(x)$$

$$\Leftrightarrow \; y = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; \left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; \tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = e^x-1$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e^x-1$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)} = e^x-1$$

$$\Leftrightarrow \; \left(\frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right)+\left(\frac{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \; \left(\frac{2}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \; \ln\left(\frac{2}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \; \ln(2)-\ln\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) = x$$

$Remarque: \; il\ est\ trop\ facile\ de\ montrer\ que:$

$$\ln(2)-\ln\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) > 0$$

Finalement :

$$F^{-1} \; : \; \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\; \longmapsto \;]0,+\infty[$$
$$y \; \longmapsto \; \ln 2-\ln\left(1-tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$