Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
juillet 2003

Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

On dispose de deux urnes : la première, notée U, contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La 2ème , notée V, contient 2 boules rouges et 4 boules bleues. On considère l'expérience aléatoire suivante : « On tire au hasard une boule de l'urne U ; si elle est rouge on la range dans l'urne V puis on tire une boule de l'urne V, sinon on la mit à part puis on tire au hasard une boule de l'urne V » Soient les événements suivantes :

- **R_1** : « La boule tirée de l'urne U est rouge »
- **B_1** : « La boule tirée de l'urne U est bleue »
- **R_2** : « La boule tirée de l'urne V est rouge »
- **B_2** : « La boule tirée de l'urne V est bleue »

1,00 **1** Calculer les probabilités $p(R_1)$ et $p(B_1)$.

1,00 **2** Calculer la probabilité de l'événement B_2 sachant que R_1 est vérifié.

0,50 **3** Calculer la probabilité de l'événement B_2 sachant que B_1 est vérifié.

0,50 **4** Calculer les probabilités $p(B_2)$ et $p(R_2)$.

Exercice Numéro 2 : (04,50 points)

Soit : $p = 5\cos\theta + 3i\sin\theta \quad ; \quad avec \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Soit l'équation : $(E) \ : \ z^2 - 2pz + 16 = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$

0,50 **1** **a** Vérifier que : $p^2 - (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2 = 16$.

0,50 **b** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On pose : $|z_1| < |z_2|$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe.

0,50 **2** **a** Montrer que si θ varie sur $[0,2\pi[$ alors M varie sur un cercle qu'on déterminera.

Soit : $(\Gamma) = \{ P \equiv milieu[M_1M_2] \ ; \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$.

0,50 **b** Montrer que (Γ) est une ellipse de foyers $F(4)$ et $F'(-4)$.

0,50 **3** **a** Montrer que : $\forall \, a, b \in \mathbb{C}\backslash\{4\}$: $\left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right) \iff ab = 16$

0,50 **b** En déduire que : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$

0,50 **c** Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1F'}}\right) \equiv \pi + \left(\overline{\overrightarrow{M_2F}, \overrightarrow{M_2F'}}\right)\ [2\pi]$

4 Soit la droite : $(T)\ :\ 3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$.

0,50 **a** Montrer que (T) est tangente à (Γ) en P.

0,50 **b** Montrer que : $(T) \perp (M_1M_2)$.

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

Rappel : $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif : $0_{\mathbb{Z}} = 0$; $1_{\mathbb{Z}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\ ;\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

0,25 **1** Vérifier que : $A \in E$.

0,50 **2** **a** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
Puis Montrer que $\times$ est une loi commutative sur E .

0,50 **b** Montrer que toutes les matrices de E sont inversibles par la loi ×.

0,50 **c** Montrer que $(E,\times)$ est un groupe abélien (commutatif).

On pose : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{n+1} = A^n \times A$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Soient : $G = \{ A^n\ ;\ n \in \mathbb{N} \}$ et $H = \{ M^{-1} \in E\ ;\ M \in G \}$.

0,25 **3** **a** Vérifier que : $G \subseteq E$.

0,50 **b** Montrer que : $H = \{ B^n\ ;\ n \in \mathbb{N} \}$.

0,50 **c** Montrer que $G \cup H$ est un sous-groupe de $(E,\times)$.

■ Exercice Numéro 4 : (09,50 points)

I Soit g_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = x + e^{-nx} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

0,50 **1** **a** Étudier les variations de la fonction g_n .

0,50 **b** Montrer que la fonction g_n admet une valeur minimale en un nombre réel u_n que l'on déterminera en fonction de n.

0,50 **2 a** Calculer chacune des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$

0,50 **b** Déterminer les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

0,50 **3 a** Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$.

0,50 **b** Tracer dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_1)$ *et* $(\mathcal{C}_2)$.

1,00 **4 a** Calculer en fonction de x l'intégrale suivante : $I(x) = \int_0^x t\, e^{-2t}\, dt$

0,50 **b** Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $(\mathcal{C}_2)$ autour de l'axe des abscisses un tour complet sur l'intervalle $[0, \ln 2]$.

1,00 **5** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes puis déterminer leur limite. Avec : $v_n = g_n(u_n)$; $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

II Soit f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + e^{nx} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Soit (Γ_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm.$

0,50 **1** Étudier les variations de la fonction f_n .

0,50 **2** En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n .

0,50 **3 a** Montrer que : $\alpha_1 \in \left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[$

0,50 **b** Montrer que les quantités $(x - \alpha_1)$ *et* $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$$

0,50 **4 a** Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$.

0,50 **b** En déduire que : $|e^x + \alpha_1| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$

Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} \beta_{n+1} = -e^{\beta_n} \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ \beta_0 = \frac{-1}{2} \end{cases}$

0,50 **5 a** Montrer l'existence d'un réel $\boldsymbol{a}$ tel que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|\beta_{n+1} - \alpha_1| \le a|\beta_n - \alpha_1|$.

0,50 **b** Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.