★★★

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2007

■ Exercice Numéro 1 : (03,00 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}}=0$; $1_{\mathbb{R}}=1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I **1ère partie** : Soit $\forall\,(a,b)\in E^2$; $a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$; $E=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

0,25 **1 a** Vérifier que : $\forall\,(a,b)\in E^2$; $a\perp b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$

0,25 **b** En déduire que l'application $\perp$ est une loi de composition interne E

0,50 **2** Montrer que $(E,\perp)$ est un groupe commutatif.

II **2ème partie** : Soit $F=\left\{\ M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}\ ;\ a\in E\ \right\}$

0,50 **1 a** Vérifier les égalités suivantes :

$$M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A \qquad et \qquad A^2=-2A \qquad avec \qquad A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

0,50 **b** Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2 On considère l'application φ définie ainsi :

$$\begin{aligned}\varphi\ :\ (E,\perp) &\mapsto (F,\times)\\ a &\mapsto \varphi(a)=M(a)\end{aligned}$$

0,50 **a** Montrer que l'application φ est un isomorphisme.

0,50 **b** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(F,\times)$.

■ Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

I Soit : (E) : $z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$; $z\epsilon\mathbb{C}$; $a\in\mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$

0,25 **1 a** Vérifier que $u=a+i$ est une solution de l'équation (E) .

0,25 **b** Déterminer v la deuxième solution de l'équation (E) .

0,25 **2 a** On suppose que $|a| = 1$, montrer que : $\left(\frac{u}{v}\right) \epsilon\, \mathbb{R}$

0,25 **b** Vérifier que : $u^2 = a\Big((a - \bar{a}) + 2i\Big)$.

0,50 **c** En déduire que : $\arg(u) \equiv \left(\frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}\right)\ [\pi]$

0,50 **3** Montrer que : $|u| + |v| \geq 2$.

II Soit : $(E_m) = \{\ M(a)\, \epsilon\, \mathcal{P}\ ;\ |u| + |v| = m\ \}$

0,50 **1** Montrer que (E_m) est une ellipse de centre O .

2 On pose : $a = x + iy$; $(x, y)\, \epsilon\, \mathbb{R}^2$.

0,25 **a** Montrer qu'une équation de (E_m) est donnée par :

$$x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$$

0,25 **b** Construire l'ellipse (E_4) .

0,50 **3** Soient $A(\sqrt{3})$ *et* $B(2i)$ les sommets de l'ellipse (E_4) .

Montrer que la droite (AB) est une tangente de l'ellipse $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

Soit : (E) : $195x - 232y = 1$; $(x, y)\, \epsilon\, \mathbb{Z}^2$

0,50 **1 a** Déterminer le plus grand commun diviseur de 232 et 195.

0,50 **b** Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est donné par :

$$S = \left\{(163 + 232k\ ;\ 137 + 195k)\, \epsilon\, \mathbb{Z}^2\ \ ;\ \ k\, \epsilon\, \mathbb{Z}\right\}$$

0,25 **c** Déterminer l'entier naturel d qui vérifie les conditions suivantes :

$$195d \equiv 1\ [232]\quad ;\quad 0 \leq d \leq 232$$

0,25 **2** Prouver que l'entier naturel 233 est un nombre premier.

3 Soit : $A = \left\{n\, \epsilon\, \mathbb{N}\ \ ;\ \ 0 \leq n \leq 232\right\} = [\![0\,;232]\!]$

Soit l'application définie ainsi : $f\ :\ A \longmapsto A$, $a \longmapsto f(a)$

Avec $f(a)$ est le reste de la division euclidienne de a^{195} par 233.

0,50 **a** Montrer que l'application f est injective.

0,50 **b** Montrer que l'application f est surjective.

0,50 **c** En déduire que l'application f est une bijection puis donner f^{-1}.

■ Exercice Numéro 4 : (10,50 points)

I Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 + (x-1)\,e^{x}$$

0,50 **1** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) \geq 0$.

0,25 **2** Montrer que : $(\exists!\, x = 0)$; $g(x) = 0$.

II Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^{x}-1} \quad ; \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

0,50 **1** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) + x\right)$

0,25 **2** Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,50 **3 a** Calculer $f'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^{*}$.

0,25 **b** En déduire le sens de variations de la fonction f .

4 Soit l'intégrale suivante : $J(x) = \displaystyle\int_0^x t\, e^{-t}\, dt$; $x \in \mathbb{R}$

0,50 **a** Par une intégration par partie, Montrer l'identité suivante :

$$J(x) = e^{-x}\left(e^{x} - 1 - x\right)$$

1,00 **b** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\left(\dfrac{x^2}{2}\, e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\right) \leq J(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{2}\, e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}\right)$

0,50 **c** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*})$; $\dfrac{1}{2}\, e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)} \leq \dfrac{e^{x}-1-x}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}\, e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$

0,75 **d** En déduire que la fonction f est dérivable en zéro et $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

0,50 **5 a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*})$; $f''(x) = \left(\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}\right)\left(e^{x}(x-2) + 2 + x\right)$

0,50 **b** Étudier le signe de la quantité $\left(e^{x}(x-2) + 2 + x\right)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

0,25 **c** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $f''(x) > 0$.

0,50 **d** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,50 **1** Montrer que $\ln 2$ est la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

0,25 **2** **a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0,50 **b** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

0,50 **c** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

IV Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{t}{e^t - 1}\right) dt \ ; \ \forall x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

0,50 **1** **a** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $\left(\frac{2x^2}{e^{2x} - 1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x - 1}\right)$

0,25 **b** Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,50 **c** Montrer que la fonction F est dérivable en zéro et $F'(0) = 1$.

0,50 **2** **a** Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$; $F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1}\right) f(x)$

0,25 **b** Étudier la monotonie de la fonction F .