EXERCICE1 : (6.5 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(0)=0 \quad \text{et} \quad \forall x\in]0,+\infty[\;\; ; \;\; f_n(x)=x-x^n\ln x$$

Et on note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0.25 1-a) Montrer que f_n est continue à droite en 0

0.75 b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 c) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1

0.5 d) Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[\;\; ; \;\; f_n'(x)=1-x^{n-1}-nx^{n-1}\ln x$$

0.5 e) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $\forall x\in[0,+\infty[\;\; ; \;\; f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

0.25 b) En déduire la position relative des deux courbes (C_n) et (C_{n+1})

0.5 3-a) Montrer que pour tout $n\geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n\in]1;2[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$

(On prendra $\ln 2=0,7$)

0.25 b) Vérifier que $(\forall n\geq 2)\quad \alpha_{n+1}^n\ln\alpha_{n+1}=1$

0.25 c) En déduire que pour tout $n\geq 2$, $f_n(\alpha_{n+1})=\alpha_{n+1}-1$

0.5 d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0.25 e) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4- On pose : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0.25 a) Montrer que : $1\leq \ell\leq 2$

0.5 b) Montrer que pour tout $n\geq 2$, $n-1=-\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

0.25 c) On suppose que $\ell>1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ en fonction de ℓ

0.5 d) En déduire la valeur de la limite ℓ

EXERCICE2 : (3.5 points)

0.25 1-a) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

0.5 b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

0.25 2- Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \leq 1$

0.5 3-a) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,1]\right)$; $0 \leq e^x - 1 \leq e.x$

0.25 b) En déduire que : $\left(\forall x \in [0,1]\right)$; $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$

4- Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$

0.25 a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

0.25 b) Montrer que la fonction : $x \mapsto \left(1+x^2\right)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0,1]$

0.25 c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1,2,......,n\}$, on a :

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(1+x^2\right)^{-2}\,dx \cdot$$

0.5 5-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$

0.5 b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE3 : (3.5 points)

Soit $m \in \mathbb{C}^*$

Partie I : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E)\ :\ z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$$

0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (im)^2$

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2- Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0.5 Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$)

Partie II : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$

Soit M_1 le point d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 et $M_3(z_3)$ l'image du point O par la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k $\left(k \in \mathbb{R}^* - \{1\}\right)$

0.75 | 1- Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k

0.75 | 2- Donner la forme algébrique de $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

0.75 | 3- En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$

EXERCICE4 : (3.5 points)

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall (x,x',y,y') \in \mathbb{R}^4$; $(x+iy)*(x'+iy') = (xy' + y^5x') + iyy'$

Partie I :

0.25 | 1- a) Vérifier que : $1*2i = 2$

0.25 | b) Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative.

0.5 | 2- Montrer que la loi $*$ est associative.

0.25 | 3- a) Vérifier que : $1*(1+2i) = 2$

0.25 | b) En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe.

4- Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $E = \left\{x + yi \,/\, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\right\}$

0.25 | a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C}, *)$

0.5 | b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

On considère les sous-ensembles de E définies par : $F = \left\{yi \,/\, y \in \mathbb{R}^*\right\}$ et $G = \left\{x + i \,/\, x \in \mathbb{R}\right\}$

0.5 | 1- Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$

2- On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\varphi(x) = x + i$

0.25 | a) Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$

0.25 | b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{C}, *)$

0.25 | c) En déduire que $(G,*)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 5 : (3 points)

0.5 1- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1,2,...,22\}$ tel que : $10u \equiv 1\ [23]$

2- Soient m un entier naturel et q et r, respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10

0.5 a) Montrer que : $m \equiv 10(q+ur)\ [23]$

0.75 b) Montrer que : 23 divise $m \Leftrightarrow$ 23 divise $(q+ur)$

3- On considère dans $\mathbb{N}$ le système $(S): \begin{cases} x \equiv 1\ [23] \\ x \equiv 2\ [10] \end{cases}$

0.75 a) Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q+2$ et 23 divise $(q+7)$

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S)

FIN