L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et un problème, répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Équations différentielles et calcul intégral	2,5 points
Problème	Étude de fonctions numériques Suites numériques	8,5 points

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 || 3 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A(0;1;1)$, $B(1;2;0)$ et $C(-1;1;2)$

1. a Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$ $(0,5)$
   a En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) $(0,25)$
2. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$
   Déterminer une équation de la sphère (S) $(0,5)$
3. Montrer que (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A $(0,5)$
4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)
   a Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) $(0,25)$
   b Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées $(0,5)$
   c Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d\Big(A,(\Delta)\Big)$ $(0,5)$

Solution de l'exercice 1 :

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}(1;1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$, alors :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-0\vec{j}+\vec{k}=\vec{i}+\vec{k}$ c'est à dire : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1;0;1)$

b) On a : $A\in(ABC)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\perp(ABC)$ alors :

$$\begin{aligned}M(x:y:z)\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\\ &\Leftrightarrow 1(x-0)+0(y-1)+1(z-1)=0\\ &\Leftrightarrow x+z-1=0\end{aligned}$$

Donc : $(ABC):x+z-1=0$

2) Déterminons une équation de la sphère (S) de centre $\Omega(1;1;2)$ et de rayon : $R=\sqrt{2}$: on a :

$$\begin{aligned}M(x;y;z)\in(S) &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(\sqrt{2})^2\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-4z+4=2\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0\end{aligned}$$

C'est à dire : $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0$

3) On a : $d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|x_\Omega+z_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1+2-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$
donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) en un seul point,
on a : $A\in(ABC)$, pour montrer que : $(ABC)\cap(S)=\{A\}$, il suffit de montrer que : $A\in(S)$
on a : $\Omega A=\sqrt{(0-1)^2+(1-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}=R$ donc $A\in(S)$,
et donc : $(ABC)\cap(S)=\{A\}$

4) a) On a : $(\Delta)\perp(ABC)$ et $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\perp(ABC)$, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ)
et on a : $C\in(\Delta)$ alors : $(\Delta)\begin{cases}x=-1+t\\ y=1\\ z=2+t\end{cases}\quad / t\in\mathbb{R}$

b) Montrons que : (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point :
Méthode 1 :
$$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(S)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+t\\ y=1\\ z=2+t\\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2\end{cases}$$
Remplaçons x ; y et z dans la dernière équation on trouve :
$$\begin{aligned}t^2-4t+4+t^2=2 &\Leftrightarrow 2t^2-4t+2=0\\ &\Leftrightarrow 2(t^2-2t+1)=0\\ &\Leftrightarrow 2(t-1)^2=0\\ &\Leftrightarrow t=1\end{aligned}$$
Remplaçons t par 1 on trouve : $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=3\end{cases}$ et donc : $(\Delta)\cap(S)=D(0;1;3)$
Méthode 2 :
On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ) et on a : $C\in(\Delta)$ alors :
$d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{||\overrightarrow{C\Omega}\wedge\vec{u}||}{||\vec{u}||}=\sqrt{2}=R$, donc (Δ) coupe la sphère (S) en un seul point.
Pour déterminer les cordonnées de cet point il faut utilisé la méthode 1.

c) On a ; $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$, donc : $\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})=-1\times1+0\times0+1\times1=0$
$d(A;(\Delta))=\dfrac{||\overrightarrow{CA}\wedge(\vec{i}+\vec{k})||}{||\vec{u}||}=\dfrac{||0\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}||}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$
Méthode 2 : On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})=0 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp(\vec{i}+\vec{k})\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp(\Delta)\end{aligned}$$
et donc C est le projeté orthogonale de A sur (Δ) et donc : $d(A;(\Delta))=AC=\sqrt{2}$

Exercice 2 || 3 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$,le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1. Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$ $(0,5)$
2. On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que l'affixe du point C image du B par la rotation R est $c = -4$ $(0,5)$
3. a. Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique $(0,5)$

   b. En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$ $(0,5)$
4. Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2 , (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

   a. Vérifier que $|z+2| = 2$ $(0,25)$

   b. Prouver que $z + \overline{z} = -8$. Remarquer que $|z| = 4$ $(0,5)$

   c. En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera $(0,25)$

Solution de l'exercice 2 :

1)

$$\begin{aligned} t(B) = D &\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \\ &\Leftrightarrow d - b = a \\ &\Leftrightarrow d = a + b \\ &\Leftrightarrow d = -1 - i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow d = -2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} C = R(B) &\Leftrightarrow c - d = e^{\frac{2\pi}{3}i}(b - d) \\ &\Leftrightarrow c + 2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}(-1 + i\sqrt{3} + 2) \\ &\Leftrightarrow c = e^{\frac{2\pi}{3}i}(1 + i\sqrt{3}) - 2 \\ &\Leftrightarrow c = e^{\frac{2\pi}{3}i}(2e^{\frac{\pi}{3}i}) - 2 \\ &\Leftrightarrow c = 2e^{(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3})i} - 2 \\ &\Leftrightarrow c = 2e^{\pi i} - 2 \\ &\Leftrightarrow c = -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

3) a)

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 4}{-1 - i\sqrt{3} + 4} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{3^2 + 6\sqrt{3}i - 3}{3^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{6 + 6\sqrt{3}i}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

et

$$\frac{c-d}{b-d} = \frac{-4+2}{-1 + i\sqrt{3}i + 2} = \frac{-2}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-2}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

On a : $(e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc : $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}$

4) a) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow DM = 2 \Leftrightarrow |z+2| = 2$

b) $M \in (\Gamma') \Leftrightarrow OM = 4 \Leftrightarrow |z| = 4$
On pose : $z = x+iy$ avec $x;y \in \mathbb{R}$ on a : $z+\bar{z} = 2x$: donc il suffit de calculer : x.
on a : $|z| = 4$ donc : $\sqrt{x^2+y^2} = 4$ et donc : $x^2+y^2 = 16$ (*)
et : $|z+2| = 2$ donc : $\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 2$ et donc : $(x+2)^2+y^2 = 4$ (**)
La différence : (*)−(**) donne : $x^2-(x+2)^2 = 12$ c-a-d : $-4x-4 = 12$ donc $x = -4$
d'où : $z+\bar{z} = 2Re(z) = 2x = -8$

c) Soit $M(z)$ et $z = x+iy$ avec : $x;y \in \mathbb{R}$ on a : $M(z) \in (\Gamma)\cap(\Gamma') \Leftrightarrow |z+2| = 2$ et $|z| = 4$
d'après : 4)b) on a : $x = -4$ et comme : $|z| = 4$ et $|-4| = 4$ alors : $y = 0$ et par suite : $z = -4 = c$ donc : $(\Gamma)\cap(\Gamma') = C(-4)$

Exercice 3 || 3 points

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher
On tire au hasard simultanément, trois boules de l'urne

1. Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{6}$; où A est l'évènement : N'obtenir aucune boule rouge $(0,75)$
2. Calculer $p(B)$; où B est l'évènement : Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes $(0,75)$
3. Montrer que $p(C) = \dfrac{1}{2}$; où C est l'évènement : Obtenir exactement une boule rouge $(0,75)$
4. Calculer $p(D)$; où D est l'évènement : Obtenir au moins deux boules rouges $(0,75)$

Solution de l'exercice 3 :

1) On a : $A = \{\overline{R};\overline{R};\overline{R}\}$ donc : $card(A) = C_6^3 = 20$ et $card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$,
donc : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$

2) On a : $B =$ "$\{B;B;B\}$ *ou* $\{V;V;V\}$" donc : $card(B) = C_3^3 + C_3^3 = 2$,
donc : $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{60}$

3) On a : $C = \{R;\overline{R};\overline{R}\}$ donc : $card(C) = C_4^1 + C_6^2 = 4\times 15 = 60$,
donc : $P(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$

4) On a : $D =$ "$\{R;R;\overline{R}\}$ *ou* $\{R;R;R\}$ donc : $card(D) = (C_4^2 \times C_6^1) + C_4^3 = (6\times 6)+4 = 40$,
donc : $P(D) = \dfrac{card(D)}{card(\Omega)} = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$

Exercice 4 || 2,5 points

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x+1)e^x$$

1. a. Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur R; puis calculer $\mathrm{I} = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$ (0, 75)

   b. A l'aide d'une intégration par parties calculer $\mathrm{J} = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x\,dx$ (0, 75)

2. a. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$ (0, 5)

   b. Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$ (0, 5)

Solution de l'exercice 4 :

1) a) On pose : $H(x) = xe^x$, la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(\forall x \in \mathbb{R})$:
$H'(x) = e^x + xe^e = (x+1)e^x = h(x)$: donc : H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
$I = \int_{-1}^{0} h(x)dx = [xe^x]_{-1}^{0} = e^{-1}$

b) En utilisant une intégration par partie calculons : $J = \int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^x dx$:
On pose : $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = (1+x)^2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 2(1+x) \end{cases}$ donc :

$$\begin{aligned} J &= \left[(x+1)^2 e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2(x+1)e^x dx \\ &= 1 - 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^x dx \\ &= 1 - 2\int_{-1}^{0} h(x)dx \\ &= 1 - 2 \times I \\ &= 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

2) a) $(E) : y'' - 2y' + y = 0$, l'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 2r + 1 = 0$
on a : $\Delta = 0$ et $r = 1$ donc la solution générale est : $y = (\alpha x + \beta)e^x$ $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$

b) on a : $y(0) = \beta$ et $y'(x) = \alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x$ donc : $y'(0) = \alpha + \beta$
$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$ et donc : $y(x) = (x+1)e^x = h(x)$

Problème || 8,5 points

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{x/2} - 1\right)^2$
$(\mathscr{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ (Unité :1cm)

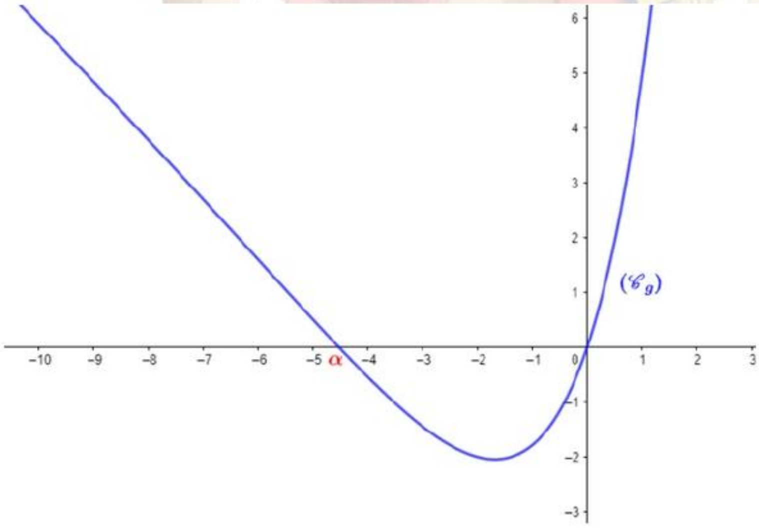
1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $(0,5)$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat $(0,5)$

3. a Montrer que la droite (Δ) : $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ $(0,5)$
   b Étudier le signe de $\big(f(x) - x\big)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ) $(0,75)$

4. a Montrer que $f'(x) = \left(e^{x/2} - 1\right)^2 + xe^{x/2}\left(e^{x/2} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b Vérifier que $x\left(e^{x/2} - 1\right) \geqslant 0$ pour x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   c Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ $(0,25)$

5. a Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2}g(x)$; où $g(x) = (2x+4)e^{x/2} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. Remarquer que : $g(\alpha) = 0$ $(0,5)$
   c Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions $(0,5)$



6. Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.
   On prend : $\ln(4) \approx 1,4$, $\alpha \approx -4,5$ et $f(\alpha) \approx -3,5$ (1)
7. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ $(0,5)$
   b. Calculer $(f^{-1})'\left[\ln(4)\right]$ $(0,25)$
8. Soit (U_n) la suite numérique définie par :
   $$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
   a. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 0 < U_n < \ln(4)$ $(0,5)$
   b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante $(0,5)$
   c. En déduire que (U_n) est convergente $(0,25)$
   d. Calculer la limite de la suite (U_n) $(0,5)$

Solution du problème :

1) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   et : $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = (0-1)^2 = 1 > 0$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty,$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$
   Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) On a : $f(x) - x = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - x = x(e^x - 2e^x + 1) - x = x(e^x - 2e^{\frac{x}{2}}) = xe^x - 2xe^{\frac{x}{2}}$
   on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} = 0$ et donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 0$
   donc la droite d'équation : $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

   b)

$$\begin{aligned}
f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow x(e^x - 2e^{\frac{x}{2}}) = 0 \\
&\Leftrightarrow xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0 \qquad (car : e^{\frac{x}{2}} > 0) \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad e^{\frac{x}{2}} = 2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad \frac{x}{2} = \ln(2) \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = \ln(4)
\end{aligned}$$

Tableau des positions relatives de (Δ) et (C_f) :

x	$-\infty$		0		$\ln(4)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{\frac{x}{2}} - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Les positions relatives de (C_f) et (Δ)		C_f est au dessus de (Δ)		C_f est au dessous de (Δ)		C_f est au dessus de (Δ)	

4) a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + x\cdot\left((e^{\frac{x}{2}}-1)^2\right)' \\ &= (e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + x\left[2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'(e^{\frac{x}{2}}-1)\right] \\ &= (e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + x\left[2\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)(e^{\frac{x}{2}}-1)\right] \\ &= (e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1) \end{aligned}$$

b) On a si : $x \leq 0$ alors : $e^{\frac{x}{2}} \leq 1$ donc : $e^{\frac{x}{2}} - 1 \leq 0$ et donc : $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) \geq 0$

si : $x \geq 0$ alors : $e^{\frac{x}{2}} \geq 1$ donc : $e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0$ et donc : $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) \geq 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) \geq 0$,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-1$		$-$	0	$+$	
$xe^{\frac{x}{2}}-1$		$+$	0	$+$	

b) On a : $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 \geq 0$ et $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right) \geq 0$ et $e^{\frac{x}{2}} > 0$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) \geq 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) a)

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \left[(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}-1)\right]' \\ &= \left[(e^{\frac{x}{2}}-1)^2 + xe^{x} - xe^{\frac{x}{2}}\right]' \\ &= 2(e^{\frac{x}{2}}-1)'(e^{\frac{x}{2}}-1) + e^x + xe^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} \\ &= 2\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(2e^{\frac{x}{2}}2xe^{\frac{x}{2}} - 2 - x) \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}} - 2 + 2e^{\frac{x}{2}} + 2xe^{\frac{x}{2}} - 2 - x\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}(4+2x) - x - 4\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x) \end{aligned}$$

avec : $g(x) = (2x+4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$

b) D'après la courbe de g on a : le signe de $g(x)$:

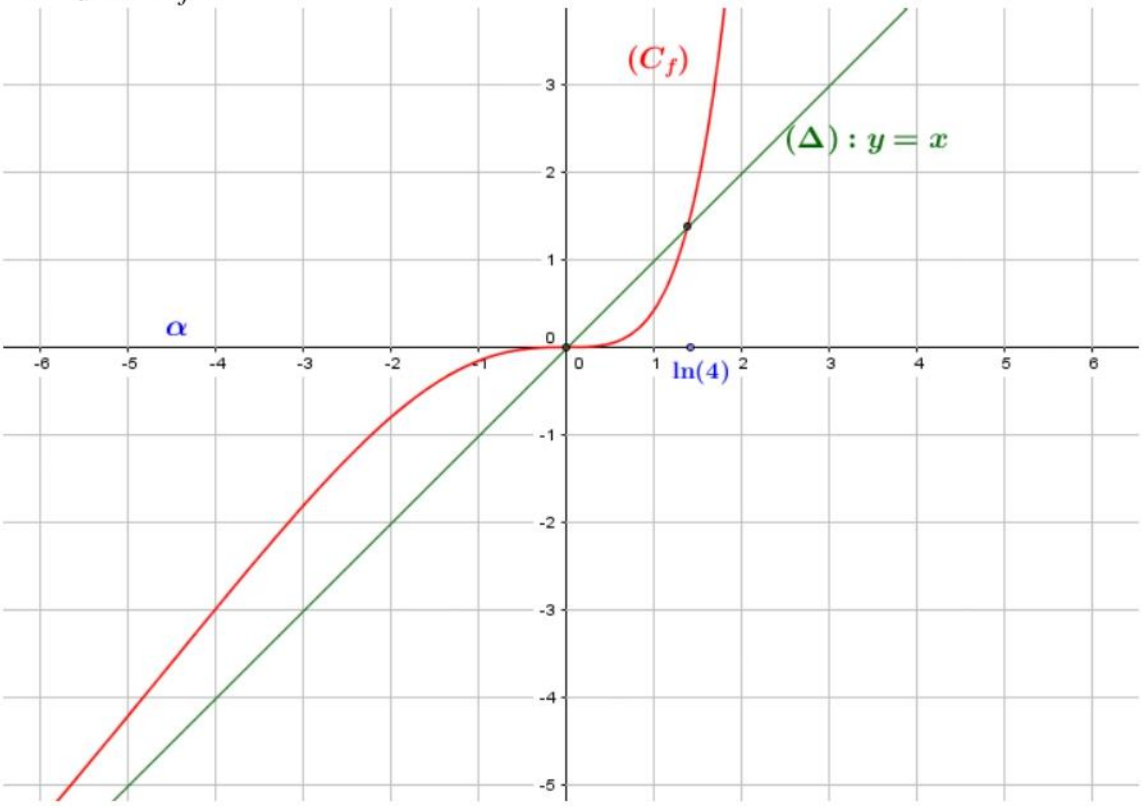
x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^{\frac{x}{2}} > 0$: donc le signe de $f''(x)$ est le même de $g(x)$ de $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
(C_f)		Convexe $\cup$	0	Concave $\cap$	0	Convexe $\cup$	

Donc : (C_f) est convexe sur $]-\infty;\alpha]$ et sur $[0;+\infty[$ et concave sur $[0;\alpha]$

6) La courbe de f :



7) a) f est continue sur $\mathbb{R}$ (le produit et la composée de fonctions le sont), et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: donc admet une fonction réciproque définie sur : $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

b) On a : $f(\ln(4)) = \ln(4)$ et $f'(\ln(4)) = 1 + 2\ln(4) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $\ln(4)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(\ln(4))\right)} = \frac{1}{f'(\ln(4))} = \frac{1}{1+2\ln(4)}$$

8) a) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \ln(4)$

- Pour $n = 0$ on a : $0 < U_0 = 1 < \ln(4)$: vraie pour $n = 0$

- Supposons que : $0 < U_n < \ln(4)$ et montrons que : $0 < U_{n+1} < \ln(4)$

on a la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0; \ln(4)[$ et donc : $f(0) < f(U_n) < f(\ln(4))$ et donc : $0 < U_{n+1} < \ln(4)$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \ln(4)$

b) D'après 3)b) on a : $(\forall x \in]0; \ln(4)[) : f(x) - x < 0$

et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in]0; \ln(4)[$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(U_n) - U_n < 0$

c'est à dire : $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} - U_n < 0$ et donc la suite (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc (U_n) est converge.

d) On a : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_n \in I =]0; \ln(4)[$

- f est continue sur $]0; \ln(4)[$
- $f\left(]0; \ln(4)[\right) =]0; ln(4)[\subset]0; ln(4)[$
- la suite (U_n) est converge

alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n$ est la solution de l'équation $f(x) - x = 0$ sur $]0; \ln(4)[$

D'après la question : 3)b) $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = \ln(4)$

on a $U_0 = 1$ et la suite (U_n) décroissante alors : $\lim_{n\to+\infty} U_n \leq 1$ et donc : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$