

Exercice 1:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

- 1) Etudier la parité de la fonction f
- 2) Déterminer la nature et les caractéristiques de la courbe (C_f)
- 3) a) Construire dans un même repère les deux courbes (C_f) et la parabole (P) d'équation $y = x^2$
 b) Résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{2x}{x+1} - x^2 \geq 0$
- 4) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2|x|}{|x|+1}$
 - a) Etudier la parité de la fonction g
 - b) Montrer que $g(x) = f(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^+
 - c) Construire dans le même repère la courbe de la fonction g .

Exercice 2:

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$

- 1) a) Déterminer le domaine de la définition de f
 b) Etudier la parité de f
- 2) a) Montrer que $T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{(a+b)((ab)^2-4)}{(ab)^2}$ pour a et b deux éléments distincts de \mathbb{R}^*
 b) Dédire que f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$
 c) Dresser le tableau des variations de f sur \mathbb{R}^* (justifier)
 d) Dédire que $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$ pour tout x de \mathbb{R}^*
- 3) On considère la fonction h définie par $h(x) = x|x| + \frac{4}{x|x|}$
 - a) Etudier la parité de h
 - b) Montrer que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
 - c) Dresser le tableau des variations de h sur \mathbb{R}^* (justifier)

Correction :Exercice 1:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

1) On a $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

La fonction f est ni paire ni impaire

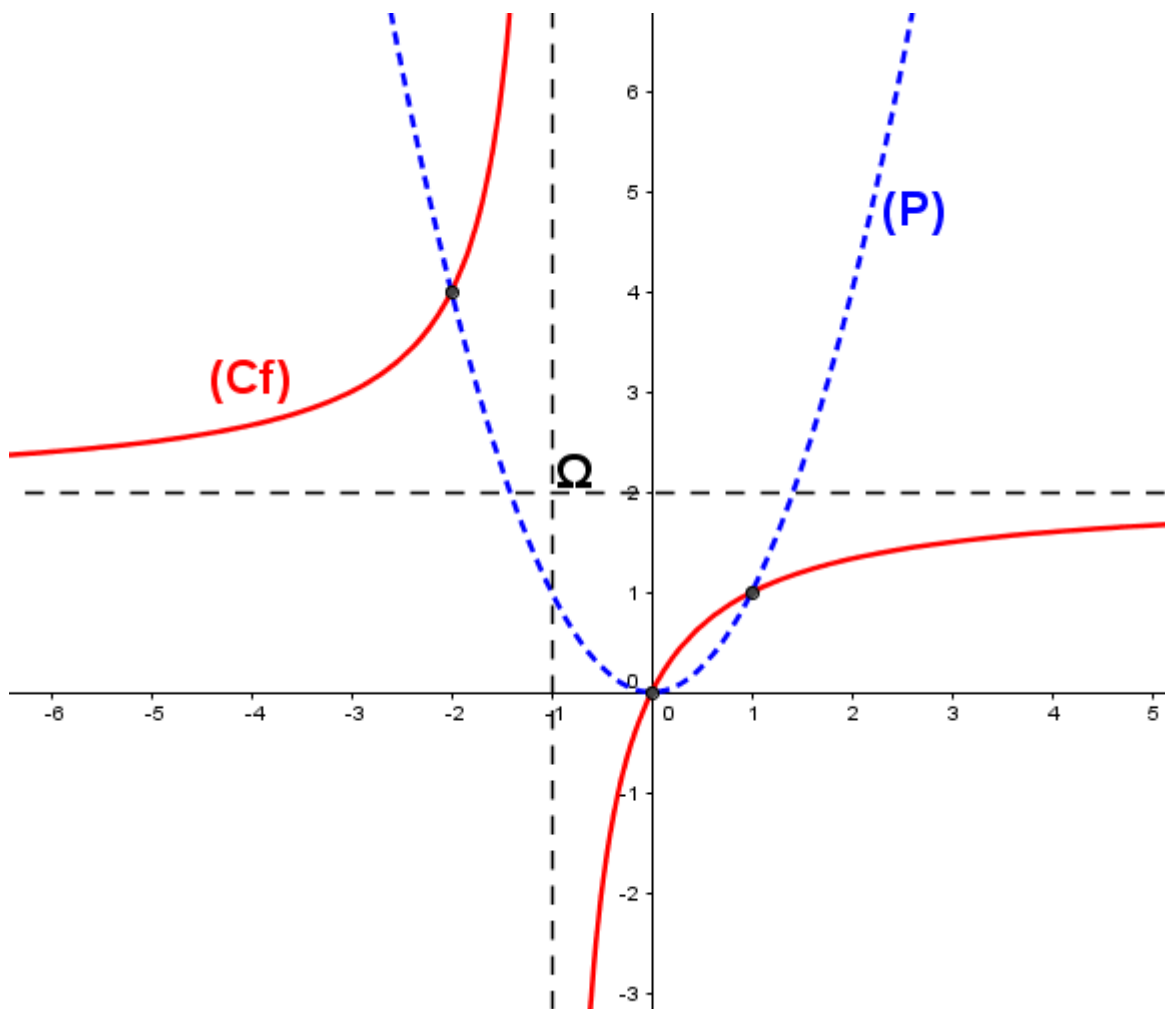
Contre exemple : $f(2) = \frac{4}{3}$ et $f(-2) = 4$ donc $f(-2) \neq f(2)$ et $f(-2) \neq -f(2)$

2) F est une fonction homographique donc (C_f) est une hyperbole de centre de symétrie le point $\Omega(-1; 2)$ (car $\frac{-d}{c} = -1$ et $\frac{a}{c} = 2$)

et d'asymptotes les deux droites d'équations $x = -1$ et $y = 2$

3) a) La parabole (P) d'équation $y = x^2$ passe par les deux points $A(1; 1)$ et $B(2; 4)$

L'hyperbole (C_f) passe par $O(0; 0)$, $C(1; 1)$ et $D(2; \frac{4}{3})$



b) L'inéquation $\frac{2x}{x+1} - x^2 \geq 0$ est équivalent à $\frac{2x}{x+1} \geq x^2$

Pour résoudre cette inéquation on cherche les intervalles où (C_f) est en dessus de (P)
d'après la figure l'ensemble des solutions est $S = [-2; -1[\cup [0; 1]$

4) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2|x|}{|x|+1}$

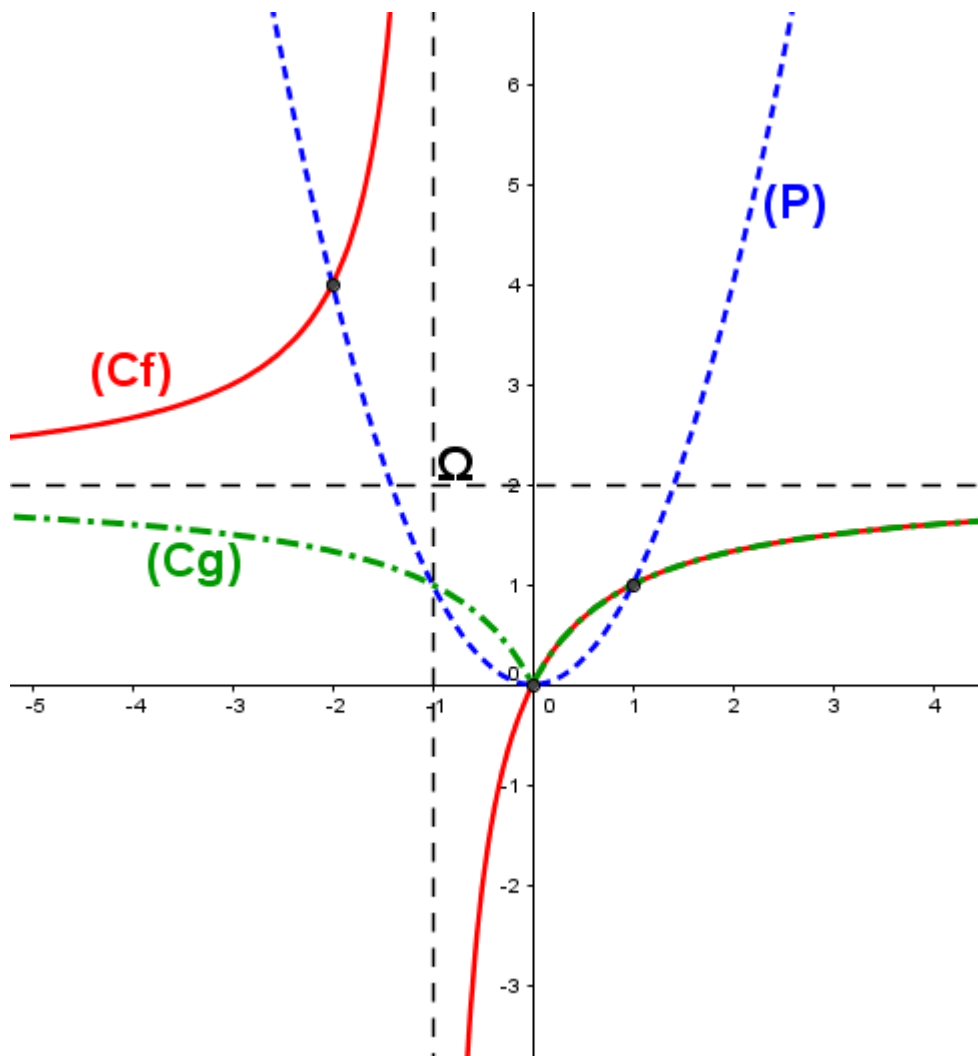
a) On a $|x| \geq 0$ donc $|x|+1 \geq 1$ d'où le dénominateur ne s'annule pas donc $D_g = \mathbb{R}$

$g(-x) = \frac{2|-x|}{|-x|+1} = \frac{2|x|}{|x|+1} = g(x)$ donc g est une fonction paire

b) On sait que pour tout x de \mathbb{R}^+ : on a $|x| = x$ donc $f(x) = g(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^+

c) La courbe de la fonction g .

g est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
sur \mathbb{R}^+ la courbe de f est confondue avec celle de g et sur \mathbb{R}^- la courbe de g est obtenue
avec une symétrie axiale



Exercice 2:

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$

1) a) On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

b) On a D_f est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = f(x)$ car $(-x)^2 = x^2$
donc f est une fonction paire

2) a) Soit a et b deux éléments distincts de \mathbb{R}^*

$$\begin{aligned} \text{on a } T &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a^2 + \frac{4}{a^2} - b^2 - \frac{4}{b^2}}{a - b} = \frac{a^4 b^2 + 4b^2 - a^2 b^4 - 4a^2}{a^2 b^2 (a - b)} = \frac{(ab)^2 (a^2 - b^2) - 4(a^2 - b^2)}{(ab)^2 (a - b)} \\ &= \frac{((ab)^2 - 4)(a^2 - b^2)}{(ab)^2 (a - b)} = \frac{((ab)^2 - 4)(a + b)}{(ab)^2} \end{aligned}$$

b) Sur l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$ on a $a \geq \sqrt{2}$ et $b \geq \sqrt{2}$ donc $a + b > 2\sqrt{2}$ car $a \neq b$
et $ab > 2$ c-à-d $(ab)^4 > 4$ donc $T > 0$ d'où f est st croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$

Sur $]0; \sqrt{2}]$ on a $0 < a \leq \sqrt{2}$ et $0 < b \leq \sqrt{2}$ donc $0 < ab < 2$ car $a \neq b$

donc $-4 < (ab)^2 - 4 < 0$ et on a $0 < a + b < 2\sqrt{2}$ donc $T < 0$ d'où f est st décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$

c) f est paire et croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ donc f est décroissante sur $] -\infty; -\sqrt{2}]$

f est paire et décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ donc f est croissante sur $[-\sqrt{2}; 0[$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↘ ↗			↘ ↗	
	4			4	

d) On a 4 est une valeur minimale de f sur \mathbb{R}^* donc $f(x) \geq 4$ pour tout x de \mathbb{R}^*

$$\text{donc } x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^*$$

3) On considère la fonction h définie par $h(x) = x|x| + \frac{4}{x|x|}$

a) On a $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ donc D_h est symétrique par rapport à 0

$$\text{et } h(-x) = -x|-x| + \frac{1}{-x|-x|} = -(x|x| + \frac{1}{x|x|}) = -h(x) \text{ car } |-x| = |x| \text{ donc } f \text{ est impaire}$$

b) Pour tout x de $]0; +\infty[$ on a $|-x| = |x|$ donc $h(x) = f(x)$

- c) D'après la dernière question f et h ont les mêmes variations sur $]0; +\infty[$
 h est impaire et croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$ donc h est croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}]$
 h est impaire et décroissante sur $]0; \sqrt{2}]$ donc h est décroissante sur $[-\sqrt{2}; 0[$

Le tableau des variations de h

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variations de $f(x)$	\nearrow -4 \searrow			\searrow 4 \nearrow	