

Exercice 1:

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

- 1) Etudier la parité de la fonction  $f$
- 2) Déterminer la nature et les caractéristiques de la courbe ( $C_f$ )
- 3) a) Construire dans un même repère les deux courbes ( $C_f$ ) et la parabole ( $P$ ) d'équation  $y = x^2$   
 b) Résoudre graphiquement l'inéquation  $\frac{2x}{x+1} - x^2 \geq 0$
- 4) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{2|x|}{|x|+1}$ 
  - a) Etudier la parité de la fonction  $g$
  - b) Montrer que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$
  - c) Construire dans le même repère la courbe de la fonction  $g$ .

Exercice 2:

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$

- 1) a) Déterminer le domaine de la définition de  $f$   
 b) Etudier la parité de  $f$
- 2) a) Montrer que  $T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a+b)((ab)^2 - 4)}{(ab)^2}$  pour  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $\mathbb{R}^*$   
 b) Déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $]0; \sqrt{2}[$   
 c) Dresser le tableau des variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  (justifier)  
 d) Déduire que  $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$
- 3) On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = x|x| + \frac{4}{x|x|}$ 
  - a) Etudier la parité de  $h$
  - b) Montrer que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$   
 c) Dresser le tableau des variations de  $h$  sur  $\mathbb{R}^*$  (justifier)

*Correction :**Exercice 1:*

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

- 1) On a  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

La fonction  $f$  est ni paire ni impaire

Contre exemple :  $f(2) = \frac{4}{3}$  et  $f(-2) = 4$  donc  $f(-2) \neq f(2)$  et  $f(-2) \neq -f(2)$

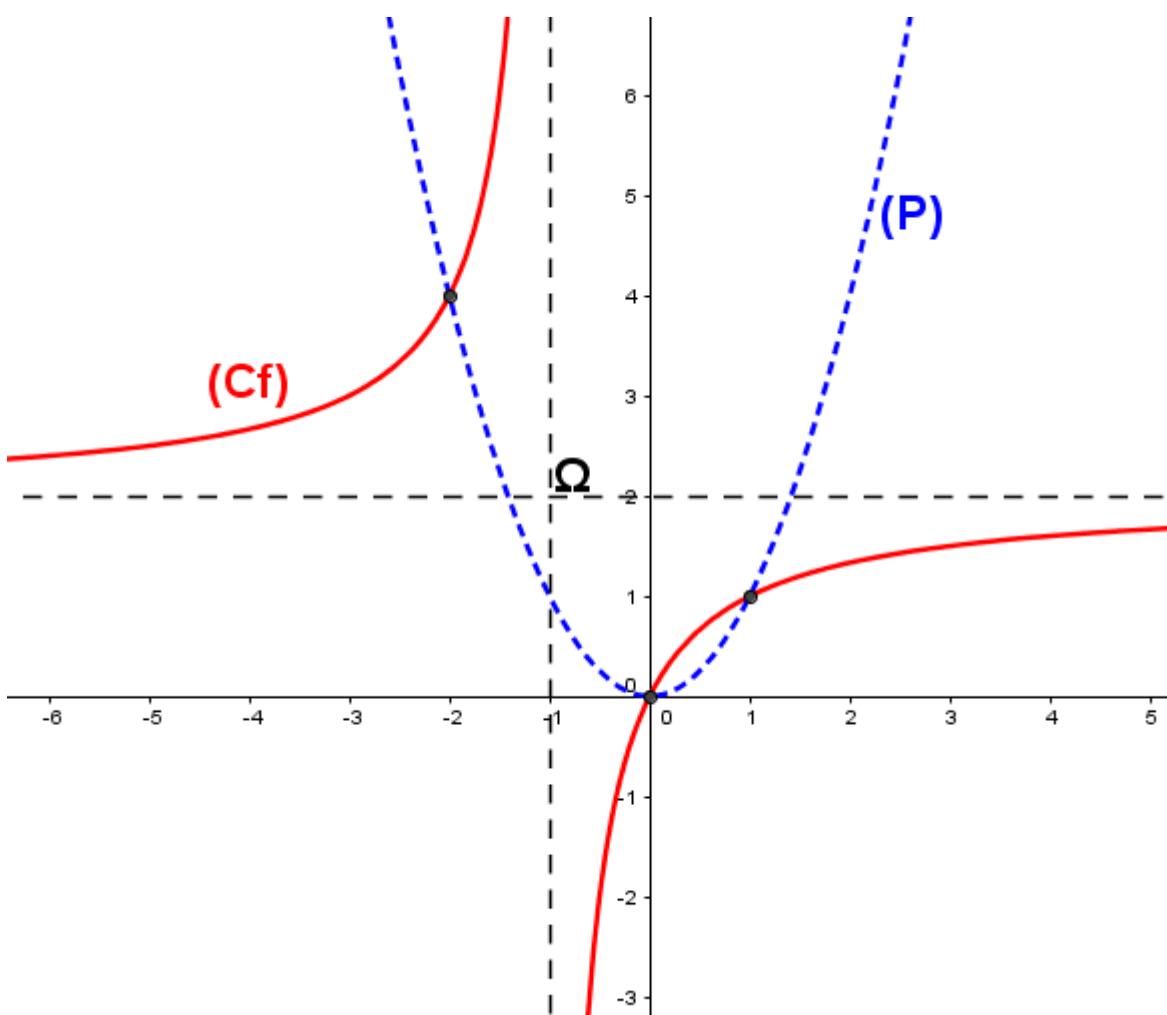
- 2)  $f$  est une fonction homographique donc  $(C_f)$  est une hyperbole de centre de symétrie

le point  $\Omega(-1; 2)$  ( car  $\frac{-d}{c} = -1$  et  $\frac{a}{c} = 2$  )

et d'asymptotes les deux droites d'équations  $x = -1$  et  $y = 2$

- 3) a) La parabole  $(P)$  d'équation  $y = x^2$  passe par les deux points  $A(1; 1)$  et  $B(2; 4)$

L'hyperbole  $(C_f)$  passe par  $O(0; 0)$ ,  $C(1; 1)$  et  $D(2; \frac{4}{3})$



b) L'inéquation  $\frac{2x}{x+1} - x^2 \geq 0$  est équivaut à  $\frac{2x}{x+1} \geq x^2$

Pour résoudre cette inéquation on cherche les intervalles où  $(C_f)$  est en dessus de  $(P)$   
d'après la figure l'ensemble des solutions est  $S = [-2; -1[ \cup [0; 1]$

4) Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{2|x|}{|x|+1}$

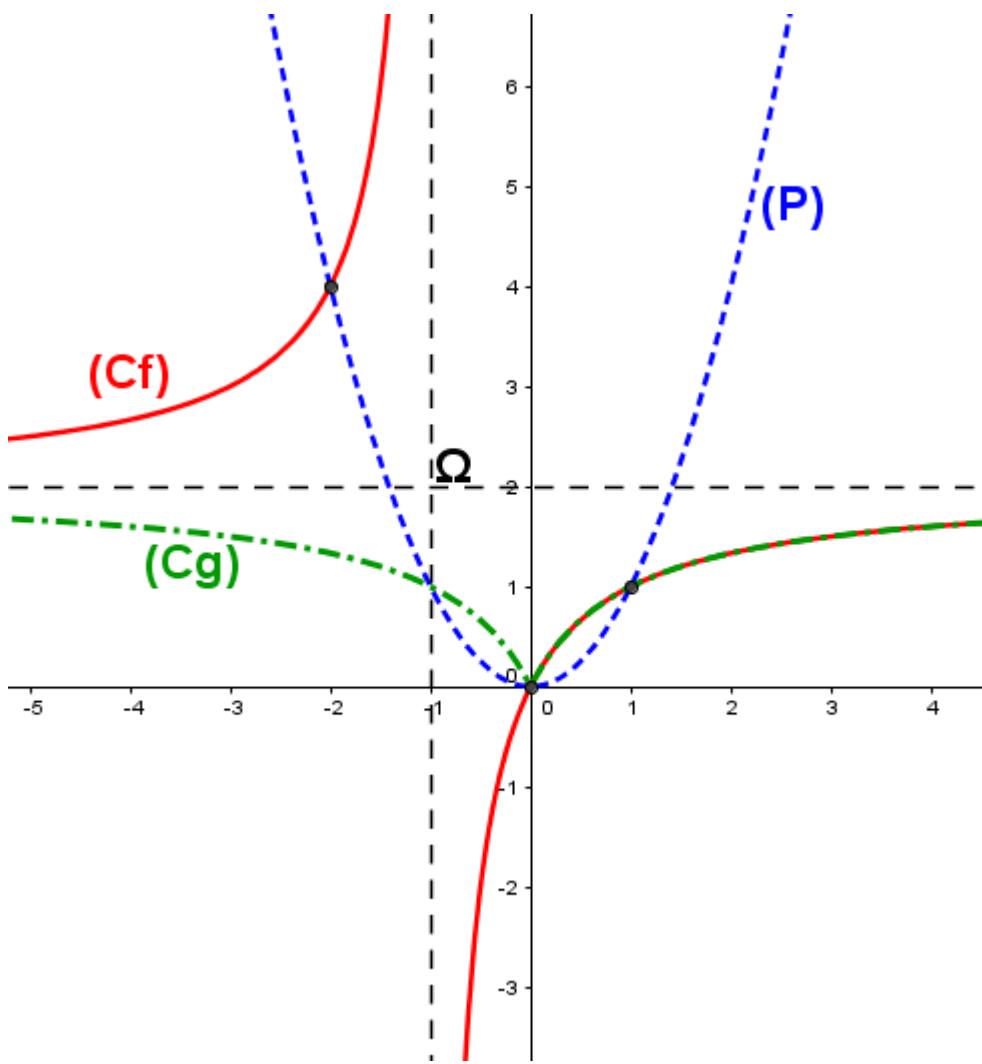
a) On a  $|x| \geq 0$  donc  $|x|+1 \geq 1$  d'où le dénominateur ne s'annule pas donc  $D_g = \mathbb{R}$

$$g(-x) = \frac{2|-x|}{|-x|+1} = \frac{2|x|}{|x|+1} = g(x) \text{ donc } g \text{ est une fonction paire}$$

b) On sait que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$  : on a  $|x| = x$  donc  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$

c) La courbe de la fonction  $g$ .

$g$  est une fonction paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées  
sur  $\mathbb{R}^+$  la courbe de  $f$  est confondue avec celle de  $g$  et sur  $\mathbb{R}^-$  la courbe de  $g$  est obtenue  
avec une symétrie axiale



## Exercice 2:

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$

- 1) a) On a  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 0\} = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$
- b) On a  $D_f$  est symétrique par rapport à 0 et  $f(-x) = f(x)$  car  $(-x)^2 = x^2$   
donc  $f$  est une fonction paire

- 2) a) Soit  $a$  et  $b$  deux éléments distincts de  $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \text{on a } T &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{a^2}{a^2} + \frac{4}{a^2} - \frac{b^2}{b^2} - \frac{4}{b^2}}{a - b} = \frac{\frac{a^4 b^2 + 4b^2 - a^2 b^4 - 4a^2}{a^2 b^2}}{a - b} = \frac{(ab)^2 (a^2 - b^2) - 4(a^2 - b^2)}{(ab)^2 (a - b)} \\ &= \frac{((ab)^2 - 4)(a^2 - b^2)}{(ab)^2 (a - b)} = \frac{((ab)^2 - 4)(a + b)}{(ab)^2} \end{aligned}$$

- b) Sur l'intervalle  $[\sqrt{2}; +\infty[$  on a  $a \geq \sqrt{2}$  et  $b \geq \sqrt{2}$  donc  $a + b > 2\sqrt{2}$  car  $a \neq b$

et  $ab > 2$  c-à-d  $(ab)^2 > 4$  donc  $T > 0$  d'où  $f$  est strictement croissante sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$

Sur  $]0; \sqrt{2}]$  on a  $0 < a \leq \sqrt{2}$  et  $0 < b \leq \sqrt{2}$  donc  $0 < ab < 2$  car  $a \neq b$

donc  $-4 < (ab)^2 - 4 < 0$  et on a  $0 < a + b < 2\sqrt{2}$  donc  $T < 0$  d'où  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; \sqrt{2}]$

- c)  $f$  est paire et croissante sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$  donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; -\sqrt{2}]$   
 $f$  est paire et décroissante sur  $]0; \sqrt{2}]$  donc  $f$  est croissante sur  $[-\sqrt{2}; 0[$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$0$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variations de $f(x)$					

- d) On a 4 est une valeur minimale de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $f(x) \geq 4$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$

donc  $x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 4$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$

- 3) On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = x|x| + \frac{4}{x|x|}$

- a) On a  $D_h = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \neq 0\} = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  donc  $D_h$  est symétrique par rapport à 0

et  $h(-x) = -x|-x| + \frac{1}{-x|-x|} = -(x|x| + \frac{1}{x|x|}) = -h(x)$  car  $|-x| = |x|$  donc  $f$  est impaire

- b) Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  on a  $|-x| = |x|$  donc  $h(x) = f(x)$

- c) D'après la dernière question f et h ont les mêmes variations sur  $]0; +\infty[$   
 h est impaire et croissante sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$  donc h est croissante sur  $]-\infty; -\sqrt{2}]$   
 h est impaire et décroissante sur  $]0; \sqrt{2}[$  donc h est décroissante sur  $[-\sqrt{2}; 0[$

Le tableau des variations de h

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$0$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variations de $f(x)$		$-4$			