PROF : ATMANI NAJIB
1ère année bac Lettres et sciences humaines BIOF
http://www.xriadiat.com/

Cours : LA DERIVATION Avec Exercices avec solutions

Présentation globale

LA DERIVATION

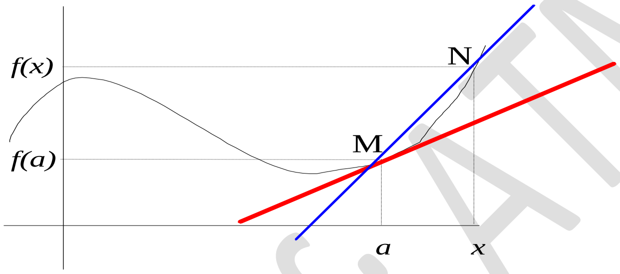
I) DERIVATION EN UN POINT

1) Définition :

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

2) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES :



Théorème : Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en $A(a;f(a))$ d'équation : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Exemple : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2$.

1) Montrer que f est dérivable en $a=1$ et préciser $f'(1)$

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $a=1$

Solution : 1) On calcul : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$ on a : $f(1)=2\times 1^2=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2(x+1)=2(1+1)=4=f'(1)\in\mathbb{R}$$

Donc f est dérivable en en $a=1$ et $f'(1)=4$

2) L'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a $a=1$: donc : $(T):y=f(1)+f'(1)(x-1)$ et On a : $f(1)=2\times1^2=2$ et $f'(1)=4$

Donc : $(T):y=2+4(x-1)$

Donc : $(T):y=2+4x-4$ Donc : $(T):y=4x-2$

Exercice1 : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$.

1) vérifier que : $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

2) Montrer que f est dérivable en $a=-2$ et préciser $f'(-2)$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $a=-2$

Solution : 1) $(x+2)(x-1)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$

2)On calcul : $\lim\limits_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=?$ on a : $f(-2)=(-2)^2-2-3=4-5=-1$

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

3) L'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $(T):y=f(a)+f'(a)(x-a)$

On a $a=-2$: donc : $(T):y=f(-2)+f'(-2)(x-(-2))$ et On a : $f(-2)=-1$ et $f'(-2)=-3$

Donc : $(T):y=-1-3(x+2)$

Donc : $(T):y=-1-3x-6$ Donc : $(T):y=-3x-7$

II) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de la fonction f sur I.

2)Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles

Tableau des dérivées des fonctions usuelles et opérations

La fonction derivée f'	La fonction f
$f'(x)=0$	$f(x)=k$
$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax$
$f'(x)=a$	$f(x)=ax+b$
$n\in\mathbb{Z}^*$ $f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^n$
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}$
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}$

Exemple1 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=x^3$

4) $f(x)=x^5+3x^2$

Solution :1) $f'(x)=(11)'=0$

2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(x^3)'=3x^{3-1}=3x^2$

4) $f'(x)=(x^5+3x^2)'=(x^5)'+(3x^2)'$

$f'(x)=(x^5+3x^2)'=5x^{5-1}+3(x^2)'=5x^4+3\times2x^{2-1}=5x^4+6x$

III)OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

La fonction derivée f'	La fonction f
$f'(x)=u'+v'$	$f(x)=u+v$
$f'(x)=u'-v'$	$f(x)=u-v$
$f'(x)=k.u'$	$f(x)=k.u$
$f'(x)=u'\times v+u\times v'$	$f(x)=u\times v$
$f'(x)=nu^n\times u'$	$f(x)=u^n$
$f'(x)=-\dfrac{u'}{u^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{u}$
$f'(x)=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$	$f(x)=\dfrac{u}{v}$

Exemple2 : Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=5x^3-2x^2+5x-3$

2) $f(x)=x^2+7x+15-\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution : 1) $f(x)=5x^3-2x^2+5x-3$

$$f'(x)=\left(5x^3-2x^2+5x-3\right)'=5\times 3x^{3-1}-2\times 2x^{2-1}+5-0$$

$$f'(x)=15x^2-4x+5$$

2) $f'(x)=\left(x^2+7x+15-\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'+\left(7x+15\right)'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'$

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exemple3: Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=\left(5x^2+1\right)\left(3x-1\right)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left(\left(5x^2+1\right)\left(3x-1\right)\right)'=\left(5x^2+1\right)'\times\left(3x-1\right)+\left(5x^2+1\right)\times\left(3x-1\right)'$$

$$f'(x)=10x\times\left(3x-1\right)+3\left(5x^2+1\right)=30x^2-10x+15x^2+3$$

$$f'(x)=45x^2-10x+3$$

Exemple4 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\left(3x+4\right)^3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left(\left(3x+4\right)^3\right)'=3\times\left(3x+4\right)^{3-1}\times\left(3x+4\right)'=3\times 3\times\left(3x+4\right)^{3-1}=9\left(3x+4\right)^2$$

Exemple5 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{1}{2x-1}$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x-1}\right)'=-\frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2}=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

Exemple6 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Exercice2 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$ 3) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 4) $f(x)=\frac{2x+1}{3x-2}$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 6) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$ 7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

Solutions :1) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

2) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

3) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f(x)=\frac{2x+1}{3x-2}$

$$f'(x)=\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)'=\frac{(2x+1)'(3x-2)-(2x+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2}=\frac{2(3x-2)-3\times(2x+1)}{(3x-2)^2}=\frac{6x-4-6x-3}{(3x-2)^2}=\frac{-7}{(3x-2)^2}$$

5) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$$

$$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

6) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7-14x^3}{\left(x^3+1\right)^2}$$

Exercice3 : Déterminer les fonctions dérivées dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$

$$f'(x)=\left(x^2\right)'+\left(3x-1\right)'=2x+3$$

2) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ Avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien