Cours Produit Scalaire 1ère BAC Sciences Expérimentales

Youssef SEMHI - 0708875223

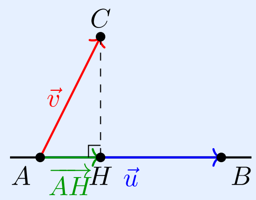
1. GÉNÉRALITÉS SUR LE PRODUIT SCALAIRE

1.1. DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A \neq B$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$) alors :
  i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens
  ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens opposés



Définition 2

i) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = AB^2$ est appelé le carré scalaire de $\overrightarrow{AB}$ ou de $\vec{u}$

ii) Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et on note $\|\vec{u}\|$ ou $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

1.2. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Propriété 1

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Forme trigonométrique** (avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$) : $\cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Linéarité** :
  i) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
  ii) $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
  iii) $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- **Positivité** : $\vec{u}^2 \geq 0$
- **Non-dégénérescence** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

1.3. BASE ET REPÈRE ORTHONORMÉ

Définition 3

i) $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P). Le couple $B = (\vec{i}, \vec{j})$ s'appelle **base** du plan.

ii) O est un point de (P) et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de (P). Le triplet $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle **repère** de (P).

iii) $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base **orthonormée** si et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Dans ce cas le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé **repère orthonormé**.

iv) $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base **orthonormée directe** si et seulement si $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée et $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Dans ce cas le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé **repère orthonormé direct**.

2. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Remarque : Dans toute la suite du chapitre, le plan (P) est rapporté à un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct.

Propriété 2

Soient $\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P). On a :

i) $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

ii) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

iii) $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$

iv) $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy' = 0$

Exemple 1 :

On donne : $\vec{u}(2,-4)$, $\vec{v}(-1,2)$, $A(1,0)$, $B(-1,0)$.

1) Calculer : $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et AB

Solution :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-1) + (-4)\times 2 = -2-8 = -10$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AB = \sqrt{(-1-1)^2+(0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$

2) Déterminer le vecteur $\vec{w}(x,y)$ unitaire et colinéaire à $\vec{v}$ (c.-à-d. $\|\vec{w}\| = 1$)

Solution : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

3) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A tel que : $A(1,3)$, $B(3,1)$, $C(-3,-1)$

Solution : $\overrightarrow{AB}(2,-2)$, $\overrightarrow{AC}(-4,-4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-4) + (-2)\times(-4) = -8+8 = 0$

Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, le triangle est rectangle en A.

4) Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue du sommet A

Solution : La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC).

$\overrightarrow{BC}(-6,-2)$, donc un vecteur directeur de la hauteur est $\vec{n}(-2,6)$ ou $\vec{m}(1,-3)$.

3. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES ET AIRE

3.1. FORMULES DE $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ET $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Propriété 3

Soient $\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs non nuls de (P) avec $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \theta[2\pi]$. On a :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Démonstration

Par définition trigonométrique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

Donc : $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Avec l'expression analytique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$

Et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2+y'^2}$

D'où : $\cos\theta = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Pour $\sin\theta$:

On considère le vecteur $\vec{w}(-y,x)$ (rotation de $\frac{\pi}{2}$ de $\vec{u}$)

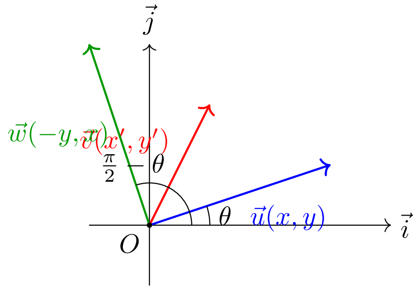
On a : $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy'-yx'$

Et $\vec{w}\cdot\vec{v} = (-y)x' + xy' = xy'-yx' = \det(\vec{u},\vec{v})$

Or $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

L'angle entre $\vec{w}$ et $\vec{v}$ est : $(\widehat{\vec{w},\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} - \theta$

Donc : $\vec{w}\cdot\vec{v} = \|\vec{w}\|\|\vec{v}\|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$
D'où : $\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$
Finalement : $\sin\theta = \dfrac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$



3.2. AIRE D'UN TRIANGLE ET D'UN PARALLÉLOGRAMME

Propriété 4

Soit ABC un triangle dans le plan (P).

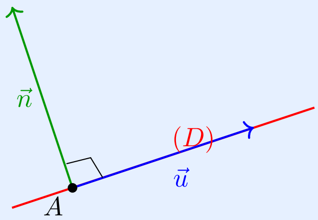
- La surface S_{ABC} du triangle ABC est : $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|$
- La surface S_{ABCD} du parallélogramme $ABCD$ est : $S_{ABCD} = |\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})|$

4. LA DROITE DANS LE PLAN

4.1. VECTEUR NORMAL

Définition 4

$D(A,\vec{u})$ est une droite dans le plan (P). Tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $D(A,\vec{u})$ s'appelle **vecteur normal** à la droite $D(A,\vec{u})$.



Remarque

Les vecteurs $\alpha\vec{n}$ (avec $\alpha \neq 0$) sont normaux à la droite $D(A,\vec{u})$

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont normaux à la droite $D(A,\vec{u})$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires

$\vec{n}(a,b)$ normal à la droite (D) équivaut à $\vec{u}(-b,a)$ est un vecteur directeur à la droite (D)

4.2. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE

Propriété 5

Soit $D(A,\vec{n})$ une droite du plan (P) avec $A(x_A,y_A)$ et $\vec{n}(a,b)$ un vecteur normal.

i) L'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est la droite $D(A,\vec{n})$

ii) $M(x,y) \in D(A,\vec{n}) \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $c = -ax_A - by_A$

iii) $ax+by+c=0$ s'appelle l'**équation cartésienne** de la droite $D(A,\vec{n})$

Remarque

Pour l'équation cartésienne $(D) : ax+by+c=0$ on a :

i) $\vec{n}(a,b)$ vecteur normal à la droite (D)

ii) $\vec{u}(-b,a)$ vecteur directeur à la droite (D)

Exemples :

1) Donner l'équation cartésienne de la droite $D(A(2,0),\vec{n}(1,5))$

Solution :

$\vec{n}(1,5)$ est un vecteur normal à la droite (D) donc une équation est de la forme $(D): 1x+5y+c=0$
Le point $A\in(D)$ donc : $A(2,0)\in(D): 1\times2+5\times0+c=0$ d'où $c=-2$
Conclusion : Équation cartésienne est $(D): x+5y-2=0$

2) On considère le triangle ABC tel que $A(2,1)$, $B(0,1)$, $C(-2,3)$

a) Déterminer les équations cartésiennes de la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$

Solution :

Médiatrice de $[AB]$:

(D_1) médiatrice de $[AB]$ donc $(AB)\perp(D_1)$ d'où $\overrightarrow{AB}$ est normal à la droite (D_1)
$I(1,1)$ est le milieu de $[AB]$ donc (D_1) passe par I
$\overrightarrow{AB}(-2,0)$
$M(x;y)\in(D_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
$\Leftrightarrow(x-1)(-2)+(y-1)(0)=0$
$\Leftrightarrow-2(x-1)=0$
$\Leftrightarrow x-1=0$
Donc : $(D_1): x-1=0$

Médiatrice de $[AC]$:

(D_2) médiatrice de $[AC]$ donc $(AC)\perp(D_2)$ d'où $\overrightarrow{AC}$ est normal à la droite (D_2)
$J(0,2)$ est le milieu de $[AC]$ donc (D_2) passe par J
$\overrightarrow{AC}(-4,2)$
$M(x;y)\in(D_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
$\Leftrightarrow(x-0)(-4)+(y-2)(2)=0$
$\Leftrightarrow-4x+2(y-2)=0$
$\Leftrightarrow-4x+2y-4=0$
$\Leftrightarrow-2x+y-2=0$
Donc : $(D_2): -2x+y-2=0$

b) Déterminer Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Solution :

Ω est l'intersection des médiatrices (D_1) et (D_2)

$$\Omega(x,y)\in(D_1)\cap(D_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\-2x+y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\-2(1)+y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$$

D'où : $\Omega(1,4)$

4.3. ORTHOGONALITÉ DE DEUX DROITES

Propriété 6

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes :

$$(D): ax+by+c=0 \quad \text{et} \quad (D'): a'x+b'y+c'=0$$

avec $\vec{n}(a,b)$ et $\vec{n'}(a',b')$ les vecteurs normaux respectivement à (D) et (D').
On a : $(D')\perp(D)\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{n'}=0\Leftrightarrow aa'+bb'=0$

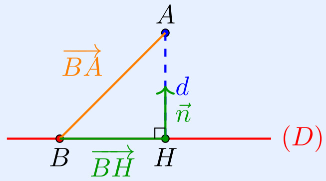
Exemple 3 : Déterminer une équation cartésienne d'une droite (D') orthogonale à (D) tel que : $(D): 2x+y-3=0$
Solution :

$\vec{n}(2,1)$ est un vecteur normal à (D)
Pour $(D')\perp(D)$, on prend $\vec{n'}(-1,2)$ comme vecteur normal à (D') (car $2\times(-1)+1\times2=-2+2=0$)
Équation de (D') : $-x+2y+c=0$ avec c un reel quelconque

4.4. DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Définition 5

$D(B, \vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D). La distance AH est appelée la **distance** de A à (D) et on note $d(A,(D)) = AH$.



Propriété 7

La distance du point $A(x_A, y_A)$ de (P) à une droite d'équation cartésienne $(D) : ax + by + c = 0$ est :

$$d(A,(D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple 4 : Determinons la distance entre $(D) : -x + y - 3 = 0$ et $A(2,5)$
Solution :

$$d(A,(D)) = \frac{|-2+5-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{2}} = 0$$

donc $A \in (D)$

5. LE CERCLE - ÉTUDE ANALYTIQUE

5.1. ÉQUATION CARTÉSIENNE DU CERCLE

Propriété 8

Tout cercle $C(\Omega(a,b), r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{ou encore} \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec $c = a^2 + b^2 - r^2$

5.2. CERCLE DE DIAMÈTRE [AB]

Propriété 9

L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est :

$$M(x,y) \in C_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

Exemple 5 ; $A(1,0)$ et $B(-1,0)$ deux points de (P). Trouver l'équation cartésienne de $C_{[AB]}$.
Solution :

$M(x,y) \in C_{[AB]} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$\overrightarrow{AM}(x-1, y-0)$, $\overrightarrow{BM}(x+1, y-0)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (x-1)(x+1) + (y-0)(y-0) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

Conclusion : $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$

5.3. PRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN CERCLE

Propriété 10

$C(\Omega(a,b),r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout $M(x,y)$ du plan (P) avec $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{\Omega M}}) = \theta[2\pi]$, on a :

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$$

On l'appelle **présentation paramétrique** du cercle $C(\Omega(a,b),r)$.

Exemple 6 : Donner la présentation paramétrique du cercle trigonométrique $C(O(0,0),1)$
Solution :

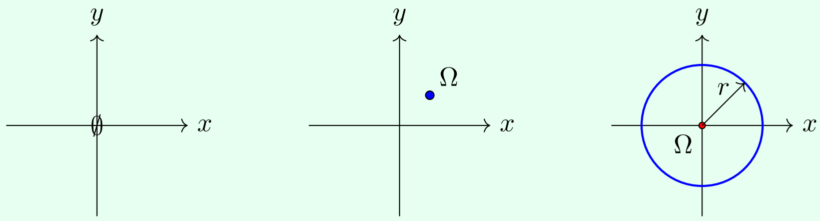
$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}$$

5.4. ÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES POINTS

Propriété 11

L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est :

- Si $\Delta = a^2+b^2-4c < 0$: $S = \emptyset$
- Si $\Delta = a^2+b^2-4c = 0$: $S = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)\right\}$ (un point)
- Si $\Delta = a^2+b^2-4c > 0$: $S = C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right), r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right)$ (un cercle)



$\Delta < 0$
Aucun point

$\Delta = 0$
Point unique
$\Omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

$\Delta > 0$
Cercle de centre Ω
et rayon $r = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

5.5. POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE ET D'UNE DROITE

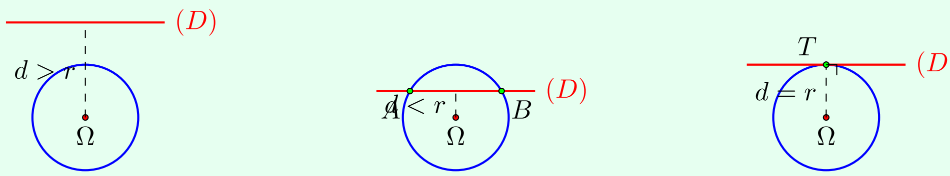
Propriété 12

(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre Ω et de rayon r.

(D) est à l'extérieure du cercle (C) ((D) et (C) sont disjoints) $\Leftrightarrow d(\Omega,(D)) > r$

(D) coupe le cercle (C) en deux points A et $B \Leftrightarrow d(\Omega,(D)) < r$

(D) est tangente au cercle (C) $\Leftrightarrow d(\Omega,(D)) = r$



$d(\Omega,(D)) > r$
Droite extérieure
Aucun point d'intersection

$d(\Omega,(D)) < r$
Droite sécante
2 points d'intersection

$d(\Omega,(D)) = r$
Droite tangente
1 point de contact

6. ENSEMBLES DE POINTS

Propriété 13

Soient A et B deux points du plan (P) et I le milieu de $[AB]$.

- **Premier cas** : $MA^2 + MB^2 = k$

  Si $k > 2OI^2$: l'ensemble est un cercle de centre I

  Si $k = 2OI^2$: l'ensemble est réduit au point I

  Si $k < 2OI^2$: l'ensemble est vide

- **Deuxième cas** : $MA^2 - MB^2 = k$

  L'ensemble est une droite perpendiculaire à (AB) (médiatrice si $k = 0$)

Exemple 7 : A et B deux points de (P) tel que : $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$.

1er cas : $MA^2 + MB^2 = k$

1) Déterminer (G_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 68$

   Solution : $OI^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 9$, $2OI^2 = 18$

   $68 > 18$ donc (G_1) est un cercle de centre I

2) Déterminer (G_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 18$

   Solution : $18 = 18$ donc $(G_2) = \{I\}$

3) Déterminer (G_3) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 4$

   Solution : $4 < 18$ donc $(G_3) = \emptyset$

2ème cas : $MA^2 - MB^2 = k$

1) Déterminer (H_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 - MB^2 = 0$

   Solution : (H_1) est la médiatrice de $[AB]$

2) Déterminer (H_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 - MB^2 = 36$

   Solution : (H_2) est une droite perpendiculaire à (AB)