Matière : mathématique Prof : Youssef SEMHI	Cours : Logique mathématique Niveau : 1 bac science expérimental	Lycée: Mohammed Serraj Sidi Yahya Zair Provence: Skhirate-Temara

Contenu du programme :

- **Les expressions : opérations sur les expressions, fonctions exprimables et quantificateurs**
- **Raisonnement mathématique : raisonnement par récurrence, raisonnement par contre-exemple, raisonnement par contraposition, raisonnement par séparation des cas, raisonnement par équivalence, raisonnement par absurde, raisonnement par récurrence**

Compétences attendues :

- **Être capable d'utiliser le raisonnement approprié en fonction de la situation étudiée**
- **Être capable de formuler des preuves et des raisonnements mathématiques clairs et logiquement corrects**

durée	Cours	remarques

I. Introduction à la logique mathématique

a) Proposition

Définition : On appelle une proposition un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps). Et, on note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R etc...

Valeur de vérité d'une proposition : vraie ou bien fausse présente la valeur de vérité de la proposition

- Si la proposition est vraie on note $V \ ou \ 1$.
- Si la proposition est fausse on note $F \ ou \ 0$.

Tableau de vérité d'une proposition est ci-dessous

P
V
F

Exemples :

P : « $2 \ est \ un \ nombre \ pair$ » proposition est vraie. Q : « $2 + 3 \ = 6$ » proposition est fausse.

b) Fonction propositionnelle

Définition : On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé contenant une variable x et qui appartiennent à des ensembles déterminés. On note $P(x)$.

Exemple :

$A(x)$: « pour tout $x \ de \ \mathbb{R}$ on a : $\sqrt{x} = x$ » est une fonction propositionnelle.

- Si $x \ = \ 2$ on obtient une proposition vraie.
- Si $x \ = -3$ on obtient une proposition fausse.

c) Les quantificateurs

Quantificateur universel : l'expression suivante « $pour \ tout \ x \ de \ \mathbb{R} \ la \ proposition \ Q(x) \ est \ vraie$ ». On la note : «$\forall x \in \mathbb{R}$ ».
Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout ou quel que soit.

Quantificateur existentiel : l'expression suivante « $il \ existe \ un \ x \ de \ \mathbb{R} \ la \ proposition \ Q(x) \ est \ vraie$ ». On la note : «$\exists x \in \mathbb{R}$».
Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe.

Exemples :

- «$\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 = |x|$»
- «$\exists x, y \in \mathbb{R} \ x \leq y$»

d) Remarques :

- L'ordre des quantificateurs identiques (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- L'ordre des quantificateurs non identiques (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.
- La négation du quantificateur $\forall$ est le quantificateur $\exists$.
- La négation du quantificateur $\exists$ est le quantificateur $\forall$.
- Les écritures suivantes sont équivalentes $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Les écritures suivantes sont équivalentes $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ et $\exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

II. Les opérations sur les propositions

a) La négation d'une proposition :

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note $\overline{P}$ tel que les valeurs de vérité de P et $\overline{P}$ sont opposées.

P	$\overline{P}$
V	**F**
F	**V**

Exemple : P « 2 *est un nombre pair* » sa négation est $\overline{P}$ « 2 *est un nombre impair* »

b) La conjonction de deux propositions - La disjonction de deux propositions

Définitions :

La conjonction de deux propositions $P\ et\ Q$ est la proposition notée $P \wedge Q$; et elle est vraie seulement dans le cas où $P\ et\ Q$ sont toutes les deux vraie.

P	**Q**	$P \wedge Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

La disjonction de deux propositions $P\ et\ Q$ est la proposition notée $P \vee Q$ et elle est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses.

P	**Q**	$P \vee Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Exemples :

« 2 *est un nombre pair* » $\wedge$ $(\mathbf{2+3=6})$ est une proposition fausse.

« 2 *est un nombre pair* » $\vee(\mathbf{2+3=6})$ est une proposition vrai.

c) L'implication de deux propositions :

Définition : l'implication de deux propositions $P\ et\ Q$ est la proposition $\overline{P} \vee Q$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$ on lit P implique Q.

P	**Q**	$P \Rightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

d) Equivalence de deux propositions:

L'équivalence de deux propositions $P\ et\ Q$ est la proposition $P \Rightarrow Q\ et\ Q \Rightarrow P$ note par $P \Leftrightarrow Q$ on lit P est équivalente à Q

P	**Q**	$P \Leftrightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

III. Types de raisonements

a) Raisonnement par contre-exemple :

Définition : Pour prouver que la propriété suivante $\forall x \in E, P(x)$ est fausse : il suffit de prouver que $\exists x \in E\ , \overline{P(x)}$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément $x\ de\ E$ qui ne vérifie pas ce qu'on appelle un contre-exemple).

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre-exemple.

Exemple : est-ce que la somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel ?

$-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ sont deux nombres irrationnelle mais leur somme $-\sqrt{2}+\sqrt{2}\ = 0$ n'est pas un nombre irrationnelle

b) Raisonnement par des équivalences successives :

Définition : Pour démontrer que l'équivalence suivant $P \Leftrightarrow Q$ est vrai, on démontrer $P \Leftrightarrow Q_1$ et $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ … $Q_n \Leftrightarrow Q$

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives.

Exemple : montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x^2+y^2 = 2xy \Leftrightarrow x = y$

$$\begin{aligned} on\ a :\ x^2+y^2 = 2xy &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x-y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x^2+y^2 = 2xy \Leftrightarrow x = y$

c) Raisonnement par la contraposée :

Définition : Pour démontrer l'implication suivante $P \Rightarrow Q$ il suffit de démontrer l'implication suivante $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la contraposée.

Exemple : montrer que $\forall x, y \in]2, +\infty[\ :\ x \neq y \Leftrightarrow x^2-4x \neq y^2-4y$

On utilise un raisonnement par contraposée pour cela on démontre :

$$\forall x, y \in]2, +\infty[: x^2-4x = y^2-4y \Leftrightarrow\ x = y$$

Soit $x, y \in]2, +\infty[$ tell que : $x^2-4x = y^2-4y\ \Leftrightarrow\ x^2-4x+4 = y^2-4y+4$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ (x-2)^2 = (y-2)^2 \\ &\Leftrightarrow\ x-2 = y-2 \text{ ou } x-2 = -y+2 \\ &\Leftrightarrow\ x-2 = y-2 \\ &\Leftrightarrow\ x = y \end{aligned}$$

$x-2 = -y+2$ est impossible car $x, y \in]2, +\infty[$ d'où $x+y > 4$

Donc $x^2-4x = y^2-4y \Leftrightarrow\ x = y$ est une implication vraie c.à.d. l'implication contraposée est vraie

Conclusion : $\forall x, y \in]2, +\infty[\ :\ x \neq y \Leftrightarrow x^2-4x \neq y^2-4y$

d) Raisonnement par disjonction des cas :

Définition : Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par disjonction des cas.

Exemple : résoudre l'équation suivante $x \in \mathbb{R} :\ |x+1|+2x = 0$

Premier cas : $x > -1$ l'équation ce écrite : $x+1+2x = 0$ donc $x = \frac{-1}{3}$

Deuxième cas : $x \leq -1$ l'équation ce écrite : $-x-1+2x = 0$ donc $x = 1$ ce qu'est impossible car $x \leq -1$

Conclusion : $S = \left\{\frac{-1}{3}\right\}$

e) Raisonnement par absurde :

Définition : Pour démontrer qu'une proposition Q (conclusion ou résultat) et on a parmi les données la proposition P.

On suppose que $\bar{Q}$ (la négation du conclusion) est vraie et au cour de la démonstration on obtient que $\bar{P}$ est vraie d'où P et $\bar{P}$ sont vraies ce qui est impossible.

Donc notre supposition $\bar{Q}$ est vraie est absurde ; d'où Q est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par absurde.

Exemple : soient x est un nombre rationnel et y est nombre irrationnelle et $a = x + y$. Montrer que a est un nombre irrationnel.

On suppose que a est un nombre rationnel. On a $a = x + y$ alors $y = x - a$ donc a est un nombre rationnel.

Alors y est un nombre rationnel et irrationnel ce qui implique un absurde.

Conclusion : la somme d'un nombre rationnelle x et un nombre irrationnel y est un nombre irrationnel.

f) Raisonnement par récurrence :

Définition : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une relation portant sur les entier naturels n tel que $n \geq n_0$

Pour démontrer que la relation $P(n)$ est vraie pour tout n. on utilise les étapes suivantes :

Vérifier que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$

On suppose que $P(n)$ est vraie pour n avec $n \geq n_0$

On démontre que la relation est vraie pour n+1

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par récurrence

Exemple :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n$ est divisible par 3

Etape 1 : pour $n = 0$ on a $0^3 + 2 \times 0 = 3 \times 0$ donc divisible par 3 alors il est vrai pour $n = 0$.

Etape 2 : supposons que $n^3 + 2n$ est divisible par 3 c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{N} : n^3 + 2n = 3k$.

Etape 3 : soit
$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1) \\ &= 3k + 3(n^2 + n + 1) \\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Donc il est vrai pour $n + 1$. Donc par raisonnement de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n$ est divisible par 3.