Exercice 01

On considère l'application :

$$f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 2$$

1) Montrer que : $f([0; +\infty[) = [2; +\infty[$.
2) Montrer que : $f^{-1}([6; 11[) = [2; 3[$.

Exercice 02

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\, f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$
2) Montrer que : $\left(\forall y \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]\right) (\exists x \in \mathbb{R}^*); y = f(x)$
3) En déduire que : $f(\mathbb{R}^*) = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 03

On considère l'application :

$$f :]1; +\infty[\to]2; +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{2x}{x-1}$$

1) Montrer que l'application f est injective.
2) Montrer que l'application f est surjective.
3) En déduire que l'application f est bijective puis donner sa bijection réciproque.

Exercice 04

On considère l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ par :

$$f(x) = E\left(\frac{x}{2}\right)$$

1) Déterminer $f([0; 5])$ et $f\left(\left[-3; \dfrac{5}{2}\right[\right)$.
2) Déterminer $f^{-1}(\{-1; 0; 1\})$ et $f^{-1}(\{-3; 5\})$.
3) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier votre réponse.

Exercice 05

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 5$$

1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\, f(2-x) = f(2+x)$.
   b) L'application f est-elle injective ? Justifier.
2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \geq 1$.
   b) L'application f est-elle surjective ? Justifier.
3) Soit l'application :

$$g : [2; +\infty[\to [1; +\infty[$$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$

   Montrer que g est bijective et donner g^{-1}.

Exercice 06

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

1) L'application f est-elle injective ? Justifier.
2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) - 2 \leq f(x) < 1$.
   b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Prouver que : $y \in [-2; 1[\iff \dfrac{2+y}{1-y} \geq 0$
   c) Montrer que l'application :

$$h : \mathbb{R} \to [-2; 1[$$

$$x \mapsto f(x)$$

   est bijective.
3) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $[-2; 1[$ puis déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 07

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 + 4x + 1$$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
   b) L'application f est-elle injective ? Justifier.
2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \geq -3$.
   b) L'application f est-elle surjective ? Justifier.

Exercice 08

On considère l'application :

$$f : \left[\frac{1}{4};+\infty\right[\to \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$$
$$x \mapsto \frac{5}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

1) Montrer que l'application f est bijective et donner sa bijection réciproque f^{-1}.
2) Résoudre dans $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$ l'équation : $f(x) = f^{-1}(x)$

Exercice 09

On considère les applications f et g définies par :

$$f : [-1;0] \to \left[0;\frac{1}{2}\right]$$
$$x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$$

et

$$g : [-1;0] \to [0;1]$$
$$x \mapsto x^2$$

1) Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.
2) Montrer que g est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.
3) a) Déterminer une application h telle que : $f = h \circ g$
   b) En déduire que h est bijective puis donner h^{-1}.

Exercice 10

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(1-x) = f(x)$
   b) L'application f est-elle injective ?
2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) L'application f est-elle surjective ?
3) Soit g et h les restrictions de f aux intervalles $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $J = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ respectivement.
   a) Montrer que g réalise une bijection de I sur l'intervalle $K = \left]\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$ puis déterminer g^{-1}
   b) On considère l'application k de J vers I telle que :

   $$k(x) = 1 - x$$

   Vérifier que $h = g \circ k$ et en déduire que h est bijective puis déterminer h^{-1}

Exercice 11

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.
On considère l'application :

$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$
$$X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$$

1) Montrer que : f injective $\iff A \cup B = E$.
2) Montrer que : f surjective $\iff A \cap B = \emptyset$.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective puis déterminer f^{-1}.

Exercice 12

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x+y, xy)$$

1) Montrer que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)\ f(x,y) = f(y,x)$. L'application f est-elle injective ?
2) Montrer que l'application f n'est pas surjective.
3) On considère les deux ensembles :

   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$
   $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4y \geq 0\}$$

   Montrer que : $f(A) = B$
4) Soit g la restriction de f à A. Montrer que g réalise une bijection de A sur B puis déterminer sa bijection réciproque.