Exercice 1

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de f en a :

$x_0 = 3 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{2x+3} - 2$	$a = -1 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x-1}$	$a = 2 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$
$\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\dfrac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad a = 0$	$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 2\sin x}{x - \sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad a = 0$	$a = 0 \quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 2

Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche du point a dans les cas ci-dessous :

$a = 0 \;; \quad f(x) = x\left\|\sin(2x)\right\|$	$a = -2 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{\left\|x^2 + 2x\right\| - 3}{\|x\| - 1}$	$a = -1 \quad ; \quad f(x) = \dfrac{\left\|x^2 + x\right\| + 2}{\|x\| + 1}$
$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+2} & ; \; x \geq -1 \\ f(-1) = x^2 + 2x & ; \; x < -1 \end{cases} \quad a = -1$	$a = 0 \quad \begin{cases} f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$	$a = 2 \quad ; \quad f(x) = (x-2)E(x)$

Exercice 3

En utilisant la notion de dérivabilité en un point déterminer les limites suivantes :

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 x - 3}{3x - \pi}$	$\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{(8x+15)^7 + 1}{x+2}$	$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^n \sin x - a^n \sin a}{x - a}$
$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2(5x-4)^3 - 1}{x-1}$	$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^n - \left(1-x^2\right)^n}{x}$	$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - \sin 2x)^3 - 1}{x}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ déterminer a et b sachant que la droite $(\Delta)\; y = 4x + 3$ est tangente à la courbe (C_f) en $A(0,3)$

Exercice 5

Soit f la fonction telle que $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{bx + 1}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer les réels b , a pour que (C_f) admet au point $I(0,2)$ une tangente parallèle à la droite $(\Delta)\, 2x + y - 1 = 0$

Exercice 6

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) = a$ calculer en fonction de a les limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x) - f(-2x)}{x} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{3f(2x) + 2f(3x) - 5f(0)}{x}$$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants calculer la dérivée $f'(x)$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$	$f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$	$f(x) = x\sqrt{2x-1} + 5$	$f(x) = 2x - \sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$

$f(x)=\dfrac{x^3}{x-3}$	$f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$	$f(x)=x^2\sqrt{4x+3}$	$f(x)=(2x-3)\sqrt{x}+1$
$f(x)=\dfrac{2\sin x+1}{1-\cos x}$	$f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$	$f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$	$f(x)=\dfrac{x+2x+2}{x^2-2x+2}$

Exercice 8

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=x+\sqrt{\left|x^2-x\right|}$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a) étudier la dérivabilité f à droite et à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité f à droite et à gauche de 1

Soit f la fonction telle que : $f(x)=\dfrac{x^2}{x|x|+1}$

1) déterminer le domaine de la fonction f

2) calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$

4) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0

Exercice 9

Soient a un réel de $\mathbb{R}^*$ et b de $\mathbb{R}^+$. on considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{a}E\left(\dfrac{3}{x}\right) & : x>0 \\ f(0)=0 & \\ f(x)=\dfrac{2\cos(bx)-3\cos\left(x\sqrt{2}\right)+1}{x} & : x<0 \end{cases}$$

1) a) montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right)\ \left|\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{3}{x}\right)-\dfrac{3}{a}\right|\leq\left|\dfrac{x}{a}\right|$

b) en déduire que f est dérivable à droite de 0 et $f_d'(0)=\dfrac{3}{a}$

2) montrer que f est dérivable à gauche de 0 et $f_g'(0)=3-b^2$

3) déterminer b , a pour que f soit dérivable en 0 et la tangente en 0 est perpendiculaire à la droite (Δ) $x-y=0$

Exercice 10

1) montrer que si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

2) applications : a) (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(x)-a^2f(a)}{x-a}$ (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

b) on suppose que $f(a)>0$ montrer que la fonction $F(x)=\sqrt{f(x)}$ est dérivable en a et déterminer le nombre dérivé