

# Cours : Dérivabilité d'une fonction numérique

## I. Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels)

### 1.1 Dérivabilité d'une fonction en un point

#### Définition 1

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ .  
On dit que  $f$  est **dérivable** en  $x_0$  s'il existe un réel  $\ell$  tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell.$$

Le réel  $\ell$  est appelé **nombre dérivé** de  $f$  en  $x_0$  et se note :

$$f'(x_0) = \ell.$$

#### Définition 2

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors la droite tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(x_0, f(x_0))$  a pour équation :  
 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

### 1.2 Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche

#### Définition 3

##### 1) Dérivabilité à droite :

Soit  $f$  définie sur un intervalle du type  $[x_0, x_0 + r[$  avec  $r > 0$ .  
On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  s'il existe un réel  $\ell_d$  tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d.$$

On note alors :

$$f'_d(x_0) = \ell_d.$$

##### 2) Dérivabilité à gauche :

Soit  $f$  définie sur un intervalle du type  $]x_0 - r, x_0]$  avec  $r > 0$ .  
On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$  s'il existe un réel  $\ell_g$  tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g.$$

On note alors :

$$f'_g(x_0) = \ell_g.$$

#### Proposition 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ .  
La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$  et :

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

Dans ce cas :

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0).$$

Exemple 1 :

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = |x|.$$

Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0.

À droite :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

À gauche :

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Comme  $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ , la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0.

### 1.3 Dérivabilité sur un intervalle

#### Définition 4

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est **dérivable sur**  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ .

On appelle alors **fonction dérivée** de  $f$  la fonction notée  $f'$  qui, à tout  $x \in I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$ .

### 1.4 Tableau des dérivées usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine
$a$ ( $a \in \mathbb{R}$ )	0	$\mathbb{R}$
$ax$ ( $a \in \mathbb{R}$ )	$a$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$

### 1.5 Opérations sur les fonctions dérivables

#### Proposition 2

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors :

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Si  $f$  est strictement positive sur  $I$ , alors :

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

### Remarque

Avant de dériver une fonction, il faut toujours vérifier qu'elle est bien définie sur l'intervalle considéré et que les formules utilisées y sont applicables.

## II. Compléments sur la dérivation

### 2.1 Dérivabilité et continuité

#### Proposition 3

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .  
Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

#### Remarque

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

#### Remarque

La réciproque est fautive : une fonction peut être continue sans être dérivable.

Exemple 2 :

La fonction

$$f(x) = |x - 1|$$

est continue en 1, mais elle n'est pas dérivable en 1.

### 2.2 Dérivée d'une fonction composée

#### Proposition 4

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles,  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)).$$

#### Corollaire

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $g$  dérivable sur  $J$  avec  $f(I) \subset J$ , alors pour tout  $x \in I$  :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Exemple 3 :

Soit

$$u(x) = \cos(\sqrt{x^2 + 5}).$$

On pose :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \quad \text{et} \quad g(x) = \cos x.$$

Alors :

$$u = g \circ f.$$

Or,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad \text{et} \quad g'(x) = -\sin x.$$

Donc :

$$u'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \cdot (-\sin(\sqrt{x^2 + 5})).$$

Ainsi :

$$u'(x) = -\frac{x \sin(\sqrt{x^2 + 5})}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

## 2.3 Dérivée de la fonction réciproque

### Proposition 5

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Si  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  et si  $f'(x_0) \neq 0$ , alors sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en

$$y_0 = f(x_0)$$

et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

### Corollaire

Si  $f$  est continue, strictement monotone et dérivable sur  $I$ , et si  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors pour tout  $y \in J = f(I)$  :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple 4 :

Soit  $f(x) = x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .

On a :

$$f'(x) = 3x^2.$$

Calculons par exemple :

$$(f^{-1})'(8).$$

On cherche d'abord  $x_0$  tel que :

$$f(x_0) = 8.$$

Donc :

$$x_0^3 = 8 \implies x_0 = 2.$$

Ainsi :

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3 \times 2^2} = \frac{1}{12}.$$

## 2.4 Dérivée de la fonction racine $n$ -ième

### Proposition 6

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ .

La fonction

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

**Propriété**

Si  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ , alors la fonction

$$x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$$

est dérivable sur  $I$  et :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}.$$

Exemple 5 :

Soit

$$f(x) = \sqrt[3]{8x - 5}.$$

Alors :

$$u(x) = 8x - 5, \quad u'(x) = 8.$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{8}{3(\sqrt[3]{8x - 5})^2}.$$

**2.5 Puissances rationnelles****Proposition 7**

Soit  $r \in \mathbb{Q}$ .

Si  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ , alors :

$$(u^r)' = r u' u^{r-1}.$$

En particulier :

$$(x^r)' = r x^{r-1}$$

sur tout intervalle où cette expression est définie.

**III. Étude des fonctions numériques (Rappels)****3.1 Monotonie d'une fonction numérique****Proposition 8**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est **croissante** sur  $I$  si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
- $f$  est **constante** sur  $I$  si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = 0$ .

Exemple 6 :

Soit

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

Alors :

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

Donc :

$$f'(x) < 0 \text{ si } x < 2,$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = 2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x > 2.$$

Ainsi :

$$f \text{ décroît sur } ]-\infty, 2] \text{ et croît sur } [2, +\infty[.$$

### 3.2 Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle

#### Proposition 9

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ .

— Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors :

$$f'(x_0) = 0.$$

— Si  $f'(x_0) = 0$  et si  $f'$  change de signe en  $x_0$ , alors  $f$  admet un extremum en  $x_0$ .

### 3.3 Axe de symétrie – Centre de symétrie

#### Proposition 10

Soit  $f$  une fonction numérique de domaine  $D_f$ .

Pour que la droite d'équation  $x = a$  soit un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , il faut et il suffit que :

$$\forall x \in D_f, \quad 2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x).$$

#### Proposition 11

Pour que le point  $\Omega(a, b)$  soit un centre de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , il faut et il suffit que :

$$\forall x \in D_f, \quad 2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

### 3.4 Les fonctions périodiques

#### Définition 5

Soit  $f$  une fonction numérique de domaine  $D_f$ .

On dit que  $f$  est **périodique** s'il existe un réel non nul  $T$  tel que :

$$\forall x \in D_f, \quad x + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Le réel  $T$  est alors une période de  $f$ .

Exemple 7 :

Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont périodiques de période  $2\pi$ .

#### Proposition 12

Si  $f$  est périodique de période  $T$ , alors pour tout entier  $n$  :  $nT$  est aussi une période de  $f$ .

Pour étudier une fonction périodique de période  $T$ , il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur  $T$ .

### 3.5 Étude de la concavité d'une courbe

#### Définition 6

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

— La courbe  $\mathcal{C}_f$  est **convexe** sur  $I$  si elle est située au-dessus de ses tangentes.

— La courbe  $\mathcal{C}_f$  est **concave** sur  $I$  si elle est située au-dessous de ses tangentes.

— Un point  $M_0(x_0, f(x_0))$  est un **point d'inflexion** si la courbe traverse sa tangente en ce point.

**Proposition 13**

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) \geq 0$ , alors  $\mathcal{C}_f$  est convexe sur  $I$ .
- Si pour tout  $x \in I$ ,  $f''(x) \leq 0$ , alors  $\mathcal{C}_f$  est concave sur  $I$ .
- Si  $f''(x_0) = 0$  et si  $f''$  change de signe en  $x_0$ , alors  $M_0(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion.

Exemple 8 :

Soit  $f(x) = x^3$ .

Alors :  $f'(x) = 3x^2$  et  $f''(x) = 6x$ .

Ainsi :

$f''(x) < 0$  si  $x < 0$  : la courbe est concave sur  $] -\infty, 0[$ ;

$f''(x) > 0$  si  $x > 0$  : la courbe est convexe sur  $]0, +\infty[$ .

Comme  $f''(0) = 0$  et change de signe en 0, le point  $O(0, 0)$  est un point d'inflexion.

**3.6 Étude des branches infinies**

