Cours Suites Numériques 2 BAC Sciences PC et SVT

Youssef SEMHI

1. GENERALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES (RAPPEL)

Soit n_0 un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ et on considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$.

1.1. SUITE MAJORÉE – SUITE MINORÉE – SUITE BORNÉE

Définition 1

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I)\, u_n \leq M$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I)\, u_n \geq m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

1.2. MONOTONIE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition 2

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **croissante** si : $(\forall n \in I)\, u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **décroissante** si : $(\forall n \in I)\, u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **constante** si : $(\forall n \in I)\, u_{n+1} = u_n$.

Remarque

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors : $(\forall n \in I)\, u_n \geq u_{n_0}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors : $(\forall n \in I)\, u_n \leq u_{n_0}$.

1.3. SUITE ARITHMÉTIQUE

Définition 3

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique s'il existe un réel r (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} - u_n = r$$

Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 1

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $(n;p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n-p)r \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

Si $p = 0$, alors :

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{et} \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

Si $p = 1$, alors :

$$u_n = u_1 + (n-1)r \quad \text{et} \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

1.4. SUITE GÉOMÉTRIQUE

Définition 4

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique s'il existe un réel q (indépendant de n) tel que :

$$(\forall n \in I)\ u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 2

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors pour tout $(n;p) \in I^2$:

$$u_n = u_p\, q^{n-p} \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \quad (n \geq p)$$

si n=0, alors :

$$u_n = u_0\, q^n \quad \text{et} \quad u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2. LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

2.1. SUITE DE LIMITE INFINIE

Définition 5

- On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de type $]A, +\infty[$, où $A > 0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ et on notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = +\infty.$$

Remarques

- L'étude de la limite d'une suite numérique se fait seulement quand n tend vers $+\infty$. C'est pour cela l'écriture $\lim u_n$ suffit.
- Si $k \in \mathbb{R}^*$, alors on a l'implication :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ku_n = +\infty$$

- Une signification intuitive de l'écriture $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ est la suivante :
  Chaque fois que l'entier n prend des valeurs grandes, les termes u_n prennent des valeurs positives et grandes telles qu'on puisse rendre ces termes plus grands que tout nombre A donné à l'avance, à partir d'un certain rang.
- Une signification intuitive de l'écriture $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ est la suivante :
  Chaque fois que l'entier n prend des valeurs grandes, les termes u_n prennent des valeurs négatives dont les valeurs absolues sont grandes et telles qu'on puisse rendre ces termes plus petits que tout nombre A donné à l'avance, à partir d'un certain rang.
- On a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

2.2. LIMITE INFINIE DES SUITES USUELLES

Proposition 1

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1. Alors :

1) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

2) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$

2.3. CONVERGENCE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

Définition 6

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers ℓ, ou encore converge vers ℓ, si tout intervalle ouvert centré en contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Définition 7

On dit qu'une suite numérique est convergente si elle admet une limite réelle. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Exemple

Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente :

Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ. Alors pour tout réel strictement positif r, l'intervalle ouvert $I =]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à partir d'un certain rang. Donc pour $r = \dfrac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait : $u_n \in \left]\ell - \dfrac{1}{2}; \ell + \dfrac{1}{2}\right[$; c'est-à-dire : $(\forall n \geq N)\, |(-1)^n - \ell| < \dfrac{1}{2}$.

Lorsque $n \geq N$ et n est pair, on obtient : $|1 - \ell| < \dfrac{1}{2}$; c'est-à-dire : $\ell \in \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$.

Lorsque $n \geq N$ et n est impair, on obtient : $|-1 - \ell| < \dfrac{1}{2}$; c'est-à-dire : $\ell \in \left]-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right[$.

Ceci est absurde car : $\left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[\cap \left]-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right[= \emptyset$.

Remarques

- Dire qu'une suite diverge (ou qu'elle est divergente), ne signifie pas qu'elle tend vers l'infini. Cela signifie exactement que la suite n'a pas de limite ou qu'elle tend vers l'infini.
- La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.

2.4. CONVERGENCE DES SUITES USUELLES

Proposition 2

Soit k un réel et p un entier naturel non nul. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k}{n^p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Proposition 3

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors on a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{n^2}$. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3 :$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n - 3| = \left|\frac{3n^2 + (-1)^n}{n^2} - 3\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - 3| = 0.$$

Par suite :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3.$$

2.5. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES FINIES

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

- La suite $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n+v_n) = \lim(u_n)+\lim(v_n)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(\lambda u_n) = \lambda \lim(u_n)$.
- La suite $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim(u_n v_n) = \lim(u_n)\times\lim(v_n)$.
- Si $\lim(v_n) \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente et de plus : $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}$.

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{\sqrt{n}}$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = 3 \quad (\text{car } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = 0)$$

2) Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_n = \frac{2\sqrt{n}+7}{3n-2}$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(2+\frac{7}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{2+\frac{7}{\sqrt{n}}}{3-\frac{2}{n}}$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{n}} = 0, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$

2.6. LIMITES ET ORDRE

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

- Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive, alors :
$$\lim u_n \geq 0.$$
- Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, alors :
$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

Remarques

- Une suite strictement positive (à partir d'un certain rang) et convergente peut avoir une limite nulle. Par exemple : On a :
$$\frac{1}{n} > 0$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$
De façon générale, le passage à la limite fait perdre les inégalités strictes.
- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente pour laquelle on souhaite montrer que la limite est strictement positive, alors il suffit de chercher un réel $m > 0$ tel que $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang.

2.7. MONOTONIE ET CONVERGENCE

Théorème 1 (Théorème de la convergence monotone)

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarque

Le théorème ci-dessus assure la convergence de la suite mais ne détermine pas sa limite.

Exemples

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$; donc : $0 \leq u_0 \leq 2$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
On a : $0 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2 + u_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$

Étudions maintenant la monotonie de la suite (u_n) :
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} = \frac{(u_n + 1)(2 - u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$$

Comme $0 \leq u_n \leq 2$ alors $\dfrac{(u_n + 1)(2 - u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante majorée par 2, donc elle est convergente.

3. CRITÈRES DE CONVERGENCE

3.1. CRITÈRES DE CONVERGENCE

Proposition 6

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq v_0}$ deux suites numériques telles que pour tout $n \geq n_0 : u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2 (Théorème des limites comparées)

Soit $(v_n)_{n \geq v_0}$ et $(w_n)_{n \geq w_0}$ deux suites numériques convergeant vers une limite commune ℓ.
Si $(u_n)_{n \geq u_0}$ est une suite vérifiant l'encadrement $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite $(u_n)_{n \geq w_0}$ converge et sa limite vaut ℓ.

Corollaire

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et ℓ un nombre réel. S'il existe une suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ tendant vers 0 telle que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge et sa limite vaut ℓ.

3.2. LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Proposition 7

Soit q un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exemples

1) On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1.$$

De même :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ car } -1<-\frac{1}{4}<1.$$

2) On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \text{ car } \frac{3}{2}>1.$$

Par contre, la suite $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

3) Calculons la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n=\frac{2^n+5^n}{3^n-5^n}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}.$$

Puisque

$$\left|\frac{2}{5}\right|<1 \text{ et } \left|\frac{3}{5}\right|<1,$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$$

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-1.$$

4. SUITES DE LA FORME $U_{n+1}=f(U_n)$ ET $V_n=f(U_n)$

4.1. LIMITE D'UNE SUITE DE LA FORME $V_n=f(U_n)$

Proposition 8

Si une suite (u_n) est convergente vers ℓ et f est une fonction continue en ℓ, alors la suite (v_n) définie par $v_n=f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(\ell)$.

4.2. LIMITE DE LA SUITE (n^r) OÙ $r\in\mathbb{Q}^*$

Proposition 9

Soit r un nombre rationnel non nul.

- Si $r>0$ alors $\lim_{n\to+\infty}n^r=+\infty$.
- Si $r<0$ alors $\lim_{n\to+\infty}n^r=0$.

4.3. SUITE DE LA FORME $U_{n+1}=f(U_n)$

Proposition 10

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I)\subset I$.
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0}\in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier $n\geq n_0$.
Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite ℓ et $\ell\in I$, alors ℓ est solution dans I de l'équation $f(x)=x$.

Applications

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

1) Étudier les variations de la fonction f.
2) Montrer que pour tout $x \in I$: $f(x) \leq x$.
3) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 4$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.