

I. Introduction aux Nombres Complexes

Activité 1

- 1) On considère l'équation $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$. Cette équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} , ce qui impose aux mathématiciens d'utiliser le nombre i qui n'est pas réel mais un nombre imaginaire tel que : $i^2 = -1$. Par suite l'équation admet 2 solutions i et $-i$ dans un autre ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} .
- 2) On considère l'équation : $(\mathbb{E}) : x^2 - 2x + 2 = 0$.
 - Vérifiez que (\mathbb{E}) s'écrit : $(x - 1)^2 + 1 = 0$.
 - Vérifiez que $1 + i$ et $1 - i$ sont solutions de (\mathbb{E}) .

Définition 1

- Un **nombre complexe** est un nombre écrit sous la forme $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, où i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
- Les nombres complexes constituent un ensemble noté \mathbb{C} .
- L'ensemble \mathbb{C} est muni des opérations d'addition $+$ et multiplication \times qui ont les mêmes propriétés que dans \mathbb{R} (commutativité, associativité, distributivité).
- Pour $z = a + bi$:
 - i) a est la **partie réelle** : $Re(z) = a$
 - ii) b est la **partie imaginaire** : $Im(z) = b$
 - iii) L'écriture $z = a + bi$ est appelée **forme algébrique**
- **Égalité** : $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$

Définition 2

Pour $z = a + bi$, le nombre $a - bi$ est appelé le **conjugué** de z , noté $\bar{z} = a - bi$.

Exemples :

$$z = 2 + 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 5i$$

$$z = -7 - 3i \Rightarrow \bar{z} = -7 + 3i$$

$$z = 1 \Rightarrow \bar{z} = 1$$

$$z = 2i \Rightarrow \bar{z} = -2i$$

Propriété 2 :

Pour l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$:

- 1) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: Deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- 2) Si $\Delta = 0$: Une solution réelle double

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

- 3) Si $\Delta < 0$: Deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \bar{z}_1$$

Exemples :

- 1) $z^2 - 2z + 5 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$$

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i, \quad z_2 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

$$2) z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = 16 - 52 = -36$$

$$z_1 = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i, \quad z_2 = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

II. Opérations dans \mathbb{C}

Propriétés des Opérations

Soient $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

- 1) **Addition** : $z + z' = (x + x') + (y + y')i$
- 2) **Multiplication** : $z \times z' = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$
- 3) **Multiplication par un réel** : Pour $k \in \mathbb{R}$, $k \cdot z = kx + kyi$

Propriétés de l'Inverse et du Quotient

Pour $z' = x' + y'i \neq 0$:

- 1) **Inverse** : $\frac{1}{z'} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2}i$
- 2) **Quotient** : $\frac{z}{z'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}i$

Exemples :

Soient $z = 1 + 5i$ et $z' = 2 - 3i$

- 1) $z + z' = (1 + 5i) + (2 - 3i) = 3 + 2i$
- 2) $z \times z' = (1 + 5i)(2 - 3i) = (2 + 15) + (-3 + 10)i = 17 + 7i$
- 3) $-3z = -3(1 + 5i) = -3 - 15i$
- 4) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$
- 5) $\frac{z}{z'} = \frac{1 + 5i}{2 - 3i} = \frac{(1 + 5i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{(2 - 15) + (3 + 10)i}{13} = \frac{-13 + 13i}{13} = -1 + i$

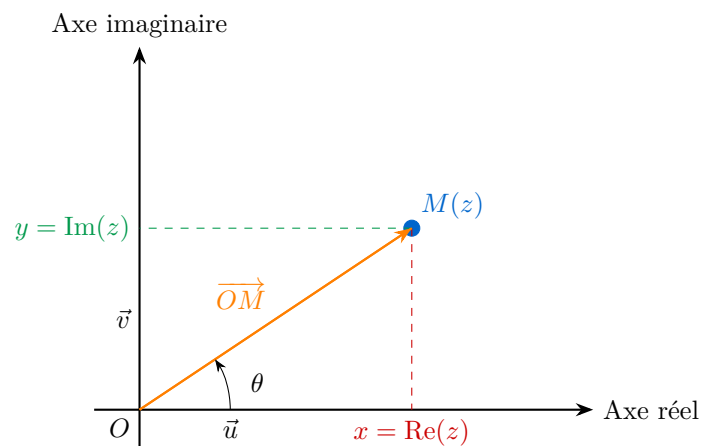
Remarques Importantes

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

$$(a - bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

III. Représentation Géométrique



Définition 3

Soit (P) un plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

- À tout nombre complexe $z = x + yi$, on associe le point $M(x, y)$ du plan (P) .

- Le plan (P) est appelé **plan complexe**.

1) Le point $M(x, y)$ est l'**image** du complexe z .

- On dit que z est l'**affiche** du point M et on note $z_M = z$.

- Si $z = a \in \mathbb{R}$, alors M est sur l'axe des abscisses (**axe réel**).

- Si $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$, alors M est sur l'axe des ordonnées (**axe imaginaire**).

Propriétés Géométriques

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $I(z_I)$ des points du plan complexe.

1) Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$.

2) Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $k(z_B - z_A)$.

3) Le point I , milieu de $[AB]$, a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

4) A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Exercice

On considère les points $A(z_A = 2 + i)$, $B(z_B = -2 + i)$, $C(z_C = 5 + xi)$ et $I(z_I)$ du plan complexe.

1) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} .

2) Déterminer l'affixe du point I , milieu de $[AB]$.

3) Déterminer k tel que A, B, C soient alignés.

Correction :

1) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-2 + i) - (2 + i) = -4$

2) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(2 + i) + (-2 + i)}{2} = i$

3) A, B, C alignés $\Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$

$$z_C - z_A = (5 + xi) - (2 + i) = 3 + (x - 1)i$$

$$z_B - z_A = -4$$

$$\text{Donc : } 3 + (x - 1)i = -4k \Rightarrow \begin{cases} 3 = -4k \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ x = 1 \end{cases}$$

IV. Propriétés du Conjugué

Propriétés du Conjugué

Soient $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ dans \mathbb{C} .

1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

2) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

3) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ pour $z \neq 0$

4) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ pour $z' \neq 0$

5) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$

6) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

7) $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

8) $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

Caractérisation des Nombres Réels et Imaginaires Purs

- 1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- 2) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

V. Module d'un Nombre Complexe

Définition 4

Pour $z = x + yi \in \mathbb{C}$, le **module** de z est le nombre réel positif :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$$

Exemples :

- 1) $|5| = |5 + 0i| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$
- 2) $|-7| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$
- 3) $|2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$
- 4) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- 5) $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

V.2. Interprétation Géométrique

Interprétation Géométrique du Module

- 1) Si M est l'image du complexe z , alors $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 2) Pour deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$, on a :

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Propriétés du Module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- 1) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- 2) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- 3) $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ pour $z' \neq 0$
- 4) $|z^n| = |z|^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$
- 5) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- 6) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Exercice

Soient $A(z_A = 1 + i)$, $B(z_B = -1 + i)$ et $C(z_C = 3i)$ trois points du plan complexe.

- 1) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC .
- 2) En déduire la nature du triangle ABC .

Correction :

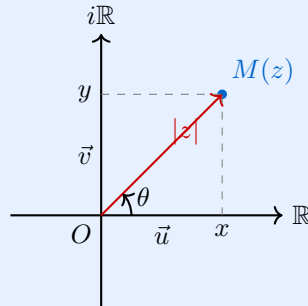
- 1)
$$AB = |z_B - z_A| = |(-1 + i) - (1 + i)| = |-2| = 2$$
$$AC = |z_C - z_A| = |3i - (1 + i)| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$CB = |z_B - z_C| = |(-1 + i) - 3i| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$
- 2) On a $AC = CB = \sqrt{5}$, donc le triangle ABC est isocèle en C .

VI. Argument d'un Nombre Complexe

Définition 5

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image M dans le plan complexe. On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

$$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$



Propriétés des Arguments

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1) $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

2) $\arg(z^p) = p \times \arg(z) [2\pi]$

3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$

4) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

5) Si $k > 0$: $\arg(kz) = \arg(z) [2\pi]$

6) Si $k < 0$: $\arg(kz) = \pi + \arg(z) [2\pi]$

Exemples

1) $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

2) $\arg(4i(1 + i)) = \arg(4i) + \arg(1 + i) [2\pi] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

3) $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

4) $\arg((1 - i)(1 + i)^8) = \arg(1 - i) + 8\arg(1 + i) [2\pi] = -\frac{\pi}{4} + 8 \times \frac{\pi}{4} [2\pi] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi [2\pi] = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

VII. Forme Trigonométrique

Définition 6

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$. La **forme trigonométrique** de z est :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$$

Exemples :

1) $z_1 = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = [2, 0]$

2) $z_2 = -5 = 5(\cos \pi + i \sin \pi) = [5, \pi]$

3) $z_3 = 7i = 7(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = [7, \frac{\pi}{2}]$

3) $z_4 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$

Opérations sous Forme Trigonométrique

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls.

1) **Produit** : $z \times z' = [r \times r', \theta + \theta']$

$$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

2) **Puissance** : $z^n = [r^n, n\theta]$ (Formule de Moivre)

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

3) **Inverse** : $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$

4) **Quotient** : $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Conséquences

Si $z = [r, \theta]$, alors :

1) $-z = [r, \theta + \pi]$

2) $\bar{z} = [r, -\theta]$

3) $|z| = r$

4) $\arg(z) = \theta [2\pi]$

Youssef SERRAJ