

1. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIENNE

1.1. DÉFINITION DE LA FONCTION \ln

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérien, et on la note \ln .

Remarques

- L'ensemble de définition de la fonction \ln est $]0; +\infty[$ et $\ln(1) = 0$.
- La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

- On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive définie sur cet intervalle.

1.2. ENSEMBLES DE DÉFINITION

Exemples

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$$f(x) = \ln x + \ln(x - 1) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2 - x) \quad ; \quad h(x) = \ln\left(\frac{x - 4}{x + 1}\right)$$

Déterminons leurs ensembles de définition :

L'expression $f(x)$ a un sens si $x > 0$ et $x - 1 > 0$, c'est-à-dire si $x > 1$. Par suite : $D_f =]1; +\infty[$

L'expression $g(x)$ a un sens si $x^2 - x > 0$. Donc : $D_g =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

L'expression $h(x)$ a un sens si $\frac{x - 4}{x + 1} > 0$. Donc : $D_h =]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \ln(x + 4) - \ln(25 - x^2) \quad ; \quad g(x) = \ln(x^2 - 8x + 7) \quad ; \quad h(x) = \sqrt{(x - 1) \ln x}$$

1.3. MONOTONIE DE LA FONCTION \ln

Proposition 1

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. On a alors :

- Pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$: $\ln x < \ln y \iff x < y$ et $\ln x = \ln y \iff x = y$
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\ln x = 0 \iff x = 1 \quad \text{et} \quad \ln x > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad \ln x < 0 \iff x < 1$$

Exemples

1) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\ln(x^2 - x) = \ln(4x - 6)$

Cette équation est définie si $x^2 - x > 0$ et $4x - 6 > 0$, c'est-à-dire si $x \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$.

On a maintenant pour tout $x \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$:

$$\ln(x^2 - x) = \ln(4x - 6) \iff x^2 - x = 4x - 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3. Comme $2 \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$, et $3 \in \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$, alors $S = \{2; 3\}$.

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $\ln(14 - x) > \ln(10 + 7x - 3x^2)$

Cette inéquation est définie si $14 - x > 0$ et $10 + 7x - 3x^2 > 0$, c'est-à-dire si $x \in \left] -1; \frac{10}{3} \right[$.

On a maintenant pour tout $x \in \left] -1; \frac{10}{3} \right[$:

$$\ln(14 - x) > \ln(10 + 7x - 3x^2) \Leftrightarrow 14 - x > 10 + 7x - 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(3x - 2) > 0$$

L'ensemble solution de l'inéquation $(x - 2)(3x - 2) > 0$ dans \mathbb{R} est $S_1 = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right[\cup]2; +\infty[$.

Par suite, l'ensemble solution de l'inéquation $\ln(14 - x) > \ln(10 + 7x - 3x^2)$ est :

$$S = S_1 \cap \left] -1; \frac{10}{3} \right[= \left] -1; \frac{2}{3} \right[\cup \left] 2; \frac{10}{3} \right[$$

Applications

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

$$\ln(2x - 3) = \ln(4 - x) \quad ; \quad \ln(x^2 + x) = \ln(-2x - 2) \quad ; \quad \ln(3x^2 + 4x + 2) = 0$$

$$\ln(4x - 5) > \ln(2x + 3) \quad ; \quad \ln(x^2 + 3x) - \ln(x + 2) \geq 0 \quad ; \quad \ln(3x^2 - 4x + 1) \geq 0$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{\ln(|x-2|-1)} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{(\ln x)^3} + \frac{x}{\ln(x+2)}$$

1.4. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Proposition 2 (Propriété fondamentale)

Pour deux réels strictement positifs x et y on a :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Proposition 3

1) Pour tout réel strictement positif x , on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

2) Pour tout $(x; y) \in]0; +\infty[^2$ on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2, \dots, x_n , on a :

$$\ln(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n)$$

4) Pour tout $x \in]0; +\infty[$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r) = r \ln x$

Remarques

1) Soit a et b deux réels strictement négatifs. On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$. Il s'ensuit donc :

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b| \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$$

2) On a pour tout $x \in]0; +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln(x)$$

Exemple

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose : $\alpha = \ln(a)$ et $\beta = \ln(b)$.

Exprimons $\ln(a^2 b^5)$ et $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}\right)$ en fonction de α et β :

$$\ln(a^2 b^5) = \ln(a^2) + \ln(b^5) = 2 \ln(a) + 5 \ln(b) = 2\alpha + 5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7 b}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}} b^{-\frac{1}{6}}\right) = \ln\left(a^{-\frac{7}{6}}\right) + \ln\left(b^{-\frac{1}{6}}\right) = -\frac{7}{6}\alpha - \frac{1}{6}\beta$$

1.5. LIMITES USUELLES

Proposition 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

1.6. TABLEAU DE VARIATIONS ET LE NOMBRE e

x	0^+	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 5

- 1) $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$
- 2) L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On la note e :

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Remarques

- 1) À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e : $e \approx 2,718281828$
- 2) On a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\ln(e^r) = r$

Exemples

- 1) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation suivante : $(E) : 3(\ln x)^2 + 2 \ln x - 1 = 0$
L'ensemble de définition de cette équation est \mathbb{R}_+^* . En posant $t = \ln x$, l'équation devient $3t^2 + 2t - 1 = 0$.
Les solutions de l'équation $3t^2 + 2t - 1 = 0$ sont -1 et $\frac{1}{3}$. Par conséquent :

$$(E) \Leftrightarrow \left(\ln x = -1 \quad \text{ou} \quad \ln x = \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \left(x = e^{-1} \quad \text{ou} \quad x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \right)$$

Par suite, l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S = \{e^{-1}, \sqrt[3]{e}\}$

- 2) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $(I) : \ln(x+1) \geq -\ln(x+3) + \ln(x+7)$
Notons D l'ensemble de définition de cette inéquation. On a alors :

$$x \in D \Leftrightarrow (x+1 > 0 \quad \text{et} \quad x+3 > 0 \quad \text{et} \quad x+7 > 0) \Leftrightarrow x > -1$$

Donc : $D =]-1; +\infty[$

On a pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \ln(x+1) + \ln(x+3) \geq \ln(x+7) \\ &\Leftrightarrow \ln[(x+1)(x+3)] \geq \ln(x+7) \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+3) \geq x+7 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + 3x - 4$ est : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$. Donc le trinôme $x^2 + 3x - 4$ admet deux racines distinctes qui sont : $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	0

En notant S l'ensemble solution de l'inéquation (I) , on conclut que :

$$x \in S \Leftrightarrow (x \in]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[\quad \text{et} \quad x \in D) \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Par suite : $S = [1; +\infty[$

3) Résolvons le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 4 \ln x - 3 \ln y = 10 \\ 2 \ln x + 5 \ln y = -8 \end{cases}$$

Si $(x; y)$ est une solution du système (S) , alors : $x > 0$ et $y > 0$.

Pour résoudre ce système, on pose : $X = \ln x$ et $Y = \ln y$. Le système (S) devient :

$$(S') : \begin{cases} 4X - 3Y = 10 \\ 2X + 5Y = -8 \end{cases}$$

On a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 6 = 26 \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 24 = 26 \quad ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 20 = -52$$

Comme $\Delta \neq 0$, alors le système (S') admet une unique solution $(X; Y)$ avec :

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1 \quad \text{et} \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-52}{26} = -2$$

Il s'ensuit donc que : $\ln x = 1$ et $\ln y = -2$, ce qui donne : $x = e$ et $y = e^{-2}$

En résumé, l'ensemble solution du système (S) est : $S = \{(e; e^{-2})\}$

Applications

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\ln(2x - 1) = -\frac{3}{5} \quad ; \quad \ln \sqrt{x} = 3 \ln 2 \quad ; \quad (\ln x)^2 - 5 \ln x + 4 = 0 \quad ; \quad \frac{\ln x + 2}{\ln x - 1} = 3$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$\ln x \geq 3 \quad ; \quad \ln^2 x - 5 \ln x + 6 > 0 \quad ; \quad -2 \ln^2 x + 3 \ln x + 5 \geq 0 \quad ; \quad \frac{\ln x - 1}{\ln x + 2} \leq 0$$

3) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3 \ln x - 4}{\ln x + 5} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{\ln x - 2} \quad ; \quad h(x) = \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{1 + \ln x} \quad ; \quad k(x) = \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{\sqrt{1 + \ln x}}$$

4) Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ 2 \ln x - 3 \ln y = 5 \end{cases} \quad ; \quad (S_2) : \begin{cases} x + y = 4 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases} \quad ; \quad (S_3) : \begin{cases} \ln x - \ln y = -1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 5 \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ \ln x + \ln y = \ln 91 \end{cases} \quad ; \quad (S_5) : \begin{cases} \ln \sqrt{x} - \ln y^2 = 1 \\ -\ln x + 4 \ln y = 6 \end{cases} \quad ; \quad (S_6) : \begin{cases} xy = e^3 \\ 3 \ln x - 4 \ln y = 2 \end{cases}$$

1.7. COURBE REPRÉSENTATIVE

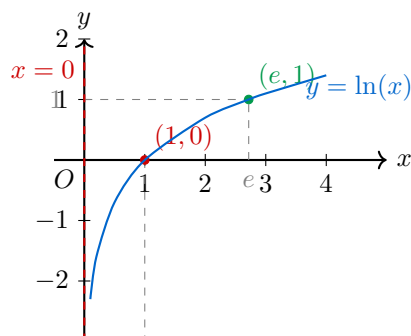
Proposition 6 (Courbe de la fonction ln)

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Alors :

1) La courbe \mathcal{C} admet l'axe des ordonnées comme asymptote : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

2) La courbe \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3) La courbe \mathcal{C} est concave sur $]0; +\infty[$



Caractéristiques de la courbe

- 1) **Domaine** : $]0, +\infty[$
- 2) **Asymptote verticale** : L'axe des ordonnées ($x = 0$)
- 3) **Point particulier** : $(1, 0)$ car $\ln(1) = 0$
- 4) **Point remarquable** : $(e, 1)$ où $e \approx 2,718$
- 5) **Sens de variation** : Strictement croissante
- 6) **Concavité** : Concave sur tout le domaine
- 7) **Limite en $+\infty$** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

1.8. LIMITES FONDAMENTALES

Proposition 7

- On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

Exemples

Calculons les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$

En posant $t = \sqrt{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0 \quad (\text{Car : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0)$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \sin x \ln(\sin x)$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$

D'autre part, en posant $X = \sin x$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(\sin x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0$$

Par suite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) = 1 \times 0 = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

car :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln(X)}{X - 1} = 1 \quad (\text{Ici on a posé } X = \cos x)$$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)}$

On a pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} &= \frac{\ln\left(x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{\ln\left(x\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)} = \frac{\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\ln x + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\ln x} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{\ln x} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)} \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 0$$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x+2)} = 1$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln^2 x - 7 \ln x)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln^2 x - 7 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln x - 7) \ln x$

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 \ln^2 x - 7 \ln x) = +\infty$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x - x}{\ln x + 2x}$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x - x}{\ln x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1 \right)}{x \left(\frac{\ln x}{x} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \frac{\ln x}{x} - 1}{\frac{\ln x}{x} + 2}$$

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x - x}{\ln x + 2x} = \frac{2 \times 0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2 + \ln(x^2 - x + 1))$

On a pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} -x + 2 + \ln(x^2 - x + 1) &= -x + 2 + \ln \left(x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= -x + 2 + 2 \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x \left(-1 + \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2 + \ln(x^2 - x + 1)) = -\infty$$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{7}{x} \right)$

On a pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$x \ln \left(1 + \frac{7}{x} \right) = 7 \times \frac{\ln \left(1 + \frac{7}{x} \right)}{\frac{7}{x}}$$

En posant $X = \frac{7}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{7}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} 7 \times \frac{\ln(1 + X)}{X} = 7$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 7x - 5 \ln x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{2020} + x + 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x + 3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{4}{x^2} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2 - 1)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x - 3} \ln \left(\frac{x}{3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(x^2 - 3x)$$

1.9. DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que : $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$

Alors la fonction $x \mapsto \ln |u(x)|$ est dérivable sur I et on a :

$$(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemples

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$$

La fonction f est bien définie sur \mathbb{R} . En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$.
 Il s'ensuit donc que pour $x \in \mathbb{R}$, $-x \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1}$. Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
 D'après la proposition précédente, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

La fonction g est définie pour les réels x tels que $\frac{x-2}{x+1} \neq 0$ et $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \in \mathbb{R} - \{2, -1\}$.

Sur chacun des intervalles $] -\infty; -1[$, $] -1; 2[$ et $]2; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x+1}$ est dérivable et ne s'annule pas.

Donc, la fonction g est dérivable sur chacun de ces intervalles.

De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2; -1\}$:

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)'}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{\frac{3}{(x+1)^2}}{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

Applications

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I donné, dans chacun des cas suivants :

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 7)$ et $I = \mathbb{R}$ | 6) $f(x) = \ln\left(\frac{2x - \sqrt{x}}{x - 3}\right)$ et $I =]3; +\infty[$ |
| 2) $f(x) = (x^2 + 2x) \ln(x^2 - 4)$ et $I =]2; +\infty[$ | 7) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}$ et $I =]0; 1[$ |
| 3) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{\ln x - 1}$ et $I =]e; +\infty[$ | 8) $f(x) = \frac{2 + \ln x}{1 - \ln x}$ et $I =]0; e[$ |
| 4) $f(x) = \ln x + 2 - \sqrt{x^2 + 4} $ et $I =]-\infty; 0[$ | |
| 5) $f(x) = \ln(\cos x)$ et $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ | |

1.10. PRIMITIVES ET DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE

Définition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$
 La fonction $\frac{u'}{u}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I .

Proposition 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que : $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$
 Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Les primitives de la fonction numérique $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur l'intervalle $] -\infty; 1[$ sont les fonctions numériques $F : x \mapsto \ln|1-x| + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Les primitives de la fonction numérique $g : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ sur l'intervalle $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ sont les fonctions numériques $G : x \mapsto \ln|\sin x| + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- On considère la fonction f définie sur $[-2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{(x^2+1)^3}$

Calculons la dérivée de la fonction f en utilisant la dérivée logarithmique :

On a pour tout $x \in [-2; +\infty[$:

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\sqrt[4]{x^3+8}\right) - \ln((x^2+1)^3) = \frac{1}{4} \ln(x^3+8) - 3 \ln(x^2+1)$$

Il s'ensuit donc que pour tout $x \in [-2; +\infty[$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3x^2}{4(x^3+8)} - \frac{6x}{x^2+1} = \frac{-3x(7x^3-x+64)}{4(x^2+1)(x^3+8)}$$

Par suite :

$$(\forall x \in [-2; +\infty[) \quad f'(x) = \frac{-3x(7x^3-x+64)}{4\sqrt{(x^3+8)^3(x^2+1)^4}}$$

2. FONCTION LOGARITHME DE BASE a

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition 3

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par \log_a , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarques

1) La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car pour tout réel x strictement positif :

$$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$$

2) On a : $\log_a(a) = 1$ et $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a^r) = r$ pour $r \in \mathbb{Q}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$.

4) Si $a > 1$ alors la fonction \log_a est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

5) Si $0 < a < 1$ alors la fonction \log_a est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Proposition 10

1) Pour tous réels strictement positifs x et y , et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad ; \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1, x_2, \dots, x_n , on a :

$$\log_a(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \dots + \log_a(x_n)$$

2.2. LOGARITHME DÉCIMAL

Définition 4

La fonction logarithme de base 10 est appelée la fonction logarithme décimale. On la note \log .
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Exemples

1) On considère les nombres réels suivants : $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$.

Déterminons β en fonction de α :

On a :

$$\alpha = \frac{\ln(100)}{\ln(40)} = \frac{\ln(2^2 \times 5^2)}{\ln(2^3 \times 5)} = \frac{2 \ln(2) + 2 \ln(5)}{3 \ln(2) + \ln(5)}$$

et

$$\beta = \frac{\ln(25)}{\ln(16)} = \frac{2 \ln(5)}{4 \ln(2)} = \frac{\ln(5)}{2 \ln(2)}$$

Posons $t = \frac{\ln(5)}{\ln(2)}$, alors $\beta = \frac{t}{2}$ et :

$$\alpha = \frac{2 + 2t}{3 + t}$$

On résout pour trouver t en fonction de α :

$$\alpha = \frac{2 + 2t}{3 + t} \Rightarrow \alpha(3 + t) = 2 + 2t \Rightarrow 3\alpha + \alpha t = 2 + 2t \Rightarrow \alpha t - 2t = 2 - 3\alpha$$

$$\Rightarrow t(\alpha - 2) = 2 - 3\alpha \Rightarrow t = \frac{2 - 3\alpha}{\alpha - 2}$$

Donc :

$$\beta = \frac{t}{2} = \frac{2 - 3\alpha}{2(\alpha - 2)}$$

2) Résolvons l'équation suivante : $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$

L'équation est définie si $x > 0$, $2x \neq 1$ et $4x \neq 1$, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{R}_+^* - \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$.

On a maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* - \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$:

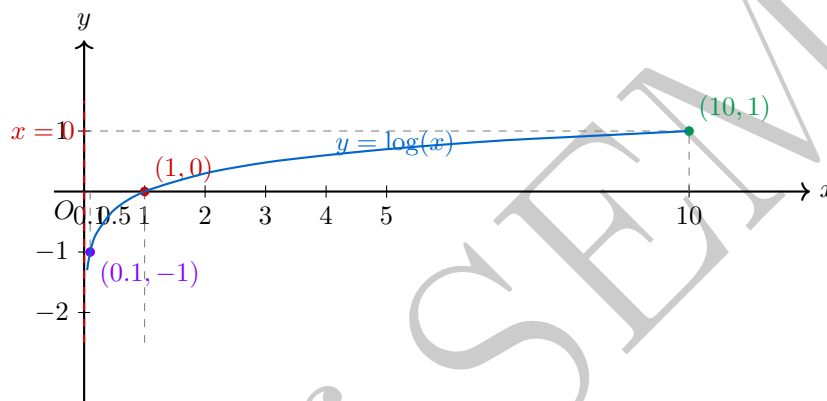
$$\begin{aligned} \log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) &= 4 \\ \Leftrightarrow \log_{2x}(2) + \log_{2x}(2x) + \log_{4x}(4) + \log_{4x}(4x) &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{\ln(2x)} + \frac{\ln 4}{\ln(4x)} &= 2 \quad (\text{car : } \log_{2x}(2x) = \log_{4x}(4x) = 1) \end{aligned}$$

Ce qui donne $\frac{1}{1+\log_2(x)} + \frac{2}{2+\log_2(x)} = 2$, c'est-à-dire $2(\log_2(x))^2 + 3\log_2(x) = 0$. Ainsi :

$$\log_2(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \log_2(x) = -\frac{3}{2}$$

Par suite, l'ensemble solution est : $S = \left\{1, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$

2.3. COURBE DE LA FONCTION \log_a



Remarque

La courbe \mathcal{C}_{\log_a} admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.