Fonction exponentielle

I. Fonction exponentielle népérienne

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée la fonction exponentielle népérienne, ou simplement la fonction exponentielle.
On la note : exp

Remarques

— Par définition de la fonction exp, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$

— On a en particulier :

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exp(1) = e.$$

Proposition 1

La fonction exp possède les propriétés suivantes :

— La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) > 0.$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x.$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\exp(\ln x) = x.$$

Corollaire

Pour tous réels x et y, on a :

$$\exp(x) = \exp(y) \iff x = y.$$

De plus :

$$\exp(x) < \exp(y) \iff x < y.$$

Enfin :

$$\exp(x) = 1 \iff x = 0,$$
$$\exp(x) < 1 \iff x < 0,$$
$$\exp(x) > 1 \iff x > 0.$$

Exemple 1 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Cette équation est définie pour :

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}.$$

Comme la fonction exp est injective, on a :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) \iff \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{x-1}.$$

Donc :

$$(x+5)(x-1) = 2x+3.$$

Ainsi :

$$x^2 + 4x - 5 = 2x + 3$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Les solutions sont :

$$x = -4 \qquad \text{ou} \qquad x = 2.$$

Donc :

$$S = \{-4; 2\}.$$

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$\exp(-x^2) = \exp\left(\frac{3x+1}{x-5}\right)$$
$$\exp\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = e^2$$
$$\exp(-x^2) > \exp(-x)$$
$$\exp(5x^2 - 7x + 2) \leq 1$$
$$\exp\left(\frac{1}{x+7}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{(x+7)^2} - 12\right).$$

1.2 Propriétés algébriques

Proposition 2

Pour tous réels x et y, on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Proposition 3

Soient x et y deux nombres réels et r un nombre rationnel. Alors :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$
$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$
$$\exp(rx) = (\exp(x))^r.$$

1.3 Une autre écriture de la fonction exponentielle

On a :

$$\exp(1) = e.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit :

$$\exp(x) = e^x.$$

Propriétés

Pour tous réels x et y, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{rx} = (e^x)^r \qquad (r \in \mathbb{Q}).$$

Remarque

Avec cette notation, les résultats précédents deviennent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x > 0.$$

$$\ln(e^x) = x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad e^{\ln x} = x.$$

Exemple 2 : Simplifions les expressions suivantes :

$$A = e^{\frac{1}{2}\ln 5}, \qquad B = e^{-\ln 8}, \qquad C = e^{\ln 2 + 2\ln 3}.$$

On a :

$$A = e^{\ln\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

$$B = e^{\ln\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}.$$

$$C = e^{\ln 2 + \ln 9} = e^{\ln 18} = 18.$$

Exemple 3 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^{x^2}\left(e^x\right)^3 = \left(e^{-x}\right)^5 e^{-7}.$$

On a :

$$e^{x^2}e^{3x} = e^{-5x}e^{-7}.$$

Donc :

$$e^{x^2+3x} = e^{-5x-7}.$$

Comme la fonction exponentielle est injective :

$$x^2 + 3x = -5x - 7.$$

Ainsi :

$$x^2 + 8x + 7 = 0.$$

Donc :

$$x = -7 \qquad \text{ou} \qquad x = -1.$$

Par suite :

$$S = \{-7; -1\}.$$

Exemple 4 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$e^x - 7 + 6e^{-x} = 0.$$

On multiplie par $e^x > 0$:

$$e^{2x} - 7e^x + 6 = 0.$$

On pose :

$$X = e^x.$$

L'équation devient :

$$X^2 - 7X + 6 = 0.$$

Donc :

$$X = 1 \qquad \text{ou} \qquad X = 6.$$

Ainsi :

$$e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = 6.$$

Donc :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln 6.$$

Par suite :

$$S = \{0; \ln 6\}.$$

Exercice d'pplication :

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{2\ln 2} + 3^{\ln 2} - 2,$$

$$B = \frac{16e^{-3\ln 2} - 1}{16e^{-2\ln 2} - 3},$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$(e^x)^4 e^{-3x}, \qquad \frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x},$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$e^{x-5} = 7,$$
$$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0.$$

1.4 Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

Proposition 4

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp'(x) = \exp(x).$$

Avec la notation e^x, cela s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^x)' = e^x.$$

Proposition 5

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction

$$x \mapsto e^{u(x)}$$

est dérivable sur I et :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Exemple 5 :

Déterminons la dérivée de :

$$f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}.$$

On pose :

$$u(x) = \sqrt{2x+1}.$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

Donc :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les primitives de la fonction :

$$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$$

sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto e^{u(x)} + \lambda,$$

où λ est une constante réelle.

Exemple 7 :

Soit :

$$f(x) = 3e^{3x} + e^{2x} + e^{-x} - x.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x) = e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x} - \frac{x^2}{2}.$$

Exercice d'application :

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{\sqrt{2x^2-x+5}},$$

$$g(x) = e^{x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}},$$

2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$u(x) = (x^2 - 2x)e^{x^3-3x^2},$$

$$v(x) = \left(4 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{2x-\sqrt{x}},$$

1.5 Limites fondamentales

Proposition 6

On a les limites fondamentales suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,$$

Proposition 7

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Exemple 8 :

Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x+4}.$$

On écrit :

$$\frac{e^x}{x^2+3x+4} = \frac{e^x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}.$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 1.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x+4} = +\infty.$$

Exercice d'pplication :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x}-e^x+3\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^3+x-1-e^x\right),$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3-2)e^x,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{x},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-2x+1}{2e^x-x^2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^2x}{x}.$$

1.6 Courbe de la fonction exponentielle

Proposition 8

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé.

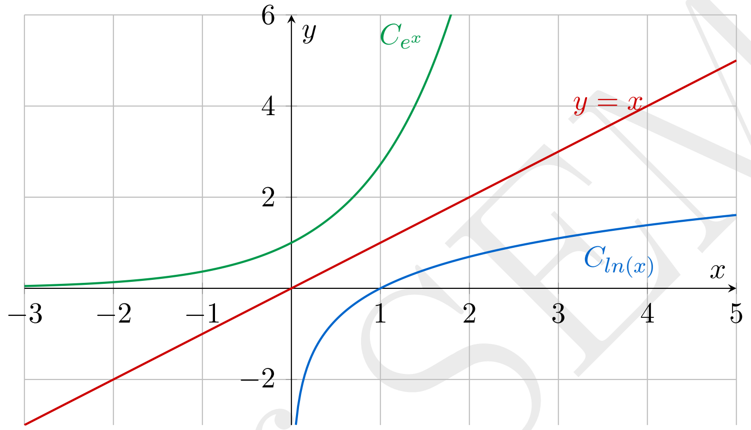
— La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

— La courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

— La courbe $\mathcal{C}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.



II. Fonction exponentielle de base a

2.1 Définition de la fonction exponentielle de base a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a.
On la note :

$$\exp_a .$$

Remarque

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp_a(x) = e^{x\ln a}.$$

On écrit aussi :

$$\exp_a(x) = a^x.$$

2.2 Propriétés algébriques

Proposition 9

Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y),$$

$$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)},$$

$$\exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r.$$

2.3 Une autre écriture de la fonction $\exp_a$

Proposition 10

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y = a^x \iff x = \dfrac{\ln y}{\ln a}.$
De plus :

$$\log_a(a^x) = x$$

et

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Proposition 11

Soient a et b deux réels strictement positifs. Pour tous réels x et y, on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$(ab)^x = a^x b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

2.4 Étude de la fonction $\exp_a$

Proposition 12

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(\exp_a)'(x) = (a^x)' = (\ln a)a^x.$$

Proposition 13

— Si $a > 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$x < y \iff a^x < a^y.$$

— Si $0 < a < 1$, alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$x < y \iff a^x > a^y.$$

Proposition 14

— Si $a > 1$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

— Si $0 < a < 1$, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty.$$

Exercice d'pplication :

1. Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

et

$$g(x) = (3^x + 2^x - 5^x)^4 .$$

2. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2^x + 2^{\frac{6}{x}} .$$

   a) Calculer $f'(x)$ puis montrer que f est strictement décroissante sur $]0; \sqrt{6}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{6}; +\infty[$.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = 12$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$ que l'on déterminera.