

## I. Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

### Définition : écriture exponentielle

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ , de module  $r = |z|$  et d'argument  $\alpha = \arg(z)$ . L'écriture trigonométrique  $z = [r, \alpha]$  peut s'écrire :

$$z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r e^{i\alpha}.$$

On appelle **écriture exponentielle** (ou **forme exponentielle**) de  $z$  l'écriture :

$$z = r e^{i\alpha}.$$

### Propriétés

Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}, \quad \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}, \quad \frac{1}{e^{i\beta}} = e^{-i\beta}, \quad e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

### Formules d'Euler

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Alors  $z = e^{i\alpha}$  et  $\bar{z} = e^{-i\alpha}$ . On obtient :

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}, \\ z - \bar{z} = 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}. \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}}, \quad \boxed{\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}}.$$

### Remarque (conséquences de Moivre)

Avec  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ , d'après la formule de Moivre :

$$z^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha), \quad (\bar{z})^n = (e^{-i\alpha})^n = e^{-in\alpha} = \cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha).$$

D'où :

$$e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = 2 \cos(n\alpha), \quad e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = 2i \sin(n\alpha), \quad e^{in\alpha} e^{-in\alpha} = 1.$$

### Exercice d'application

On linéarise  $\cos^3 x$ .

D'après les formules d'Euler :  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , donc :

$$\cos^3 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}).$$

Ainsi :

$$\cos^3 x = \frac{1}{8} ((e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})) = \frac{1}{8} (2 \cos 3x + 6 \cos x).$$

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x}.$$

## II. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

### Activité

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$z^2 = 0, \quad z^2 = 2, \quad z^2 = -2.$$

2) Donner la propriété générale.

### Propriété : solutions de $z^2 = a$

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des solutions  $S$  de l'équation  $z^2 = a$  dans  $\mathbb{C}$  est :

- Si  $a = 0$  :  $S = \{0\}$ .
- Si  $a > 0$  :  $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ .
- Si  $a < 0$  :  $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$ .

## XI.2. Équation du 2<sup>e</sup> degré : $az^2 + bz + c = 0$

### Théorème

Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ , l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet :

- 1) Si  $\Delta = 0$  : une solution double  $z_0 = -\frac{b}{2a}$ .
- 2) Si  $\Delta > 0$  : deux solutions réelles  $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- 3) Si  $\Delta < 0$  : deux solutions complexes conjuguées  $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

### Remarque

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de  $az^2 + bz + c = 0$ , alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

De plus :

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \quad \Delta = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

### Exercice d'application

**On considère :**  $(E) : z^2 + z + 1 = 0$ .

- 1) Calculons le discriminant :  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ .
- 2) Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

## III. Écriture complexe des transformations : translation – homothétie – rotation

### 1. Vocabulaire

#### Vocabulaire

Le plan complexe  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on associe un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . Cette relation est appelée **transformation** du plan et se note  $f : (P) \rightarrow (P)$  :

$$M(z) \longmapsto f(M(z)) = M'(z').$$

L'écriture  $z' = f(z)$  est appelée **écriture complexe** de la transformation  $f$ .

### 2. Translation

#### Rappel

La translation  $t_{\vec{u}}$  de vecteur  $\vec{u}$  est définie par :

$$f(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

### Propriété (écriture complexe)

Si  $b$  est l'affixe du vecteur  $\vec{u}$ , alors :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' - z = b \quad \text{ou encore} \quad \boxed{z' = z + b}.$$

**Exercice d'application :** Soit  $z' = z + 2 - 3i$ . Alors  $f$  est une translation de vecteur d'affixe  $b = 2 - 3i$ .

## 3. Homothétie

### Rappel

L'homothétie  $h(\Omega, k)$  a pour centre  $\Omega$  et pour rapport  $k$ . Elle est définie par :

$$f(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}.$$

### Propriété (écriture complexe)

Si  $\omega$  est l'affixe de  $\Omega$ , alors :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \iff z' - \omega = k(z - \omega)$$

et donc :

$$\boxed{z' = kz + b} \quad \text{avec} \quad b = \omega - k\omega.$$

Réciproquement, toute transformation de la forme  $z' = kz + b$  avec  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  est une homothétie. Son centre est le point invariant  $\Omega$  tel que  $f(\Omega) = \Omega$ , donc :

$$\omega = k\omega + b \implies \boxed{\omega = \frac{b}{1 - k}}.$$

### Exercice d'application :

Soit  $z' = 2z + 1 + i$ . Ici  $k = 2$  et  $b = 1 + i$ , donc :

$$\omega = \frac{1 + i}{1 - 2} = -(1 + i) = -1 - i.$$

Conclusion :  $f$  est l'homothétie de rapport 2 et de centre d'affixe  $\omega = -1 - i$ .

## 4. Rotation

### Rappel

La rotation  $r(\Omega, \theta)$  a pour centre  $\Omega$  et pour angle  $\theta$ . Elle est définie par, pour tout  $M \neq \Omega$  :

$$f(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M, \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi], \end{cases} \quad \text{et } f(\Omega) = \Omega.$$

### Propriété (écriture complexe)

Si  $\omega$  est l'affixe du centre  $\Omega$ , alors :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \iff \boxed{z' = az + b}$$

avec  $a = e^{i\theta}$  (donc  $|a| = 1$  et  $a \neq 1$ ) et  $b = \omega - \omega e^{i\theta}$ . Le centre  $\Omega$  est le point invariant, donc :

$$\omega = a\omega + b \implies \boxed{\omega = \frac{b}{1 - a}}.$$

L'angle de la rotation vérifie :  $\theta = \arg(a) [2\pi]$ .

**Application :** Soit  $z' = -iz + 1 - i$ . On écrit  $-i = e^{-i\pi/2}$ , donc  $a = e^{-i\pi/2}$  et  $b = 1 - i$ .

$$\omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{1 - i}{1 + i} = -i.$$

De plus  $\theta = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Conclusion :  $f$  est une rotation de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = -i$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

## Exercice

Parmi les écritures complexes suivantes, indiquer la nature et les éléments caractéristiques :

$$(1) z' = -4z - 2 + 5i \quad (2) z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i.$$

**Correction :**

1) Pour  $z' = -4z - 2 + 5i$  : c'est une **homothétie** (car  $a = -4 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ). Rapport  $k = -4$  et centre :

$$\omega = \frac{b}{1-k} = \frac{-2+5i}{1-(-4)} = \frac{-2+5i}{5} = -\frac{2}{5} + i.$$

2) Pour  $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$  : on reconnaît

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = e^{i\pi/6},$$

donc c'est une **rotation** d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et  $a = e^{i\pi/6}$ . Le centre est :

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-4+2i}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}.$$

(La simplification donne l'affixe du centre.)

## Résumé : transformation $z' = az + b$

### Résumé

Toute transformation du plan complexe de la forme :

$$z' = az + b \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

se classe suivant la valeur de  $a$  :

- **Translation** si  $a = 1$  :  $z' = z + b$  (vecteur d'affixe  $b$ ).
- **Homothétie** si  $a = k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  :  $z' = kz + b$ , centre  $\omega = \frac{b}{1-k}$ .
- **Rotation** si  $|a| = 1$  et  $a \neq 1$  :  $a = e^{i\theta}$ , centre  $\omega = \frac{b}{1-a}$  et angle  $\theta = \arg(a) [2\pi]$ .

## VI. Géométrie plane et nombres complexes (rappels)

### Rappels : affixes et arguments

Soient  $A(z_A)$ ,  $B(z_B)$ ,  $C(z_C)$ ,  $D(z_D)$  et  $I(z_I)$  des points du plan complexe.

- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$ .
- $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$  est l'affixe du milieu de  $[AB]$ .
- $A, B, C$  alignés  $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$  (équivalent à  $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$ ).
- $(AB) \parallel (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$ .
- $(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ .
- Mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$  :  

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

- Mesure de  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$  :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

- Si  $z_{\vec{u}}$  et  $z_{\vec{v}}$  sont les affixes de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arg(z_{\vec{u}}) - \arg(z_{\vec{v}}) [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) [2\pi].$$

Relation complexe	Signification géométrique
$ z - z_A  =  z - z_B $	$AM = BM$ . Le point $M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ .
$ z - z_A  = k \ (k > 0)$	$AM = k$ . Le point $M$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon $k$ .
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2}\right] = re^{\pm i\pi/2}$	Si $r \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ , alors le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ . Si $r = 1$ , alors le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle en $A$ .
$\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right  = 1$	Le triangle $ABC$ est isocèle en $A$ .
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3}\right] = e^{\pm i\pi/3}$	Le triangle $ABC$ est équilatéral.