Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction numérique sur un intervalle

1. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Activité 1 :

Déterminer les fonctions primitives de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1)\quad f(x)=5x^2 \quad \text{et} \quad I=\mathbb{R}$$

$$2)\quad f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{et} \quad I=]1,+\infty[$$

$$3)\quad f(x)=\frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad I=]0,+\infty[$$

$$4)\quad f(x)=\frac{e^{3x}}{2} \quad \text{et} \quad I=\mathbb{R}$$

Activité 2 :

On considère les trois fonctions numériques F, G et f définies par :

$$F(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x, \qquad G(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$$

et $f(x)=-x+4$.

1) Montrer que F et G sont des fonctions primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Calculer : $F(1)-F(0)$ et $G(1)-G(0)$. Que remarquez-vous ?
3) Soit g une fonction continue sur un intervalle I et soient G_1 et G_2 deux fonctions primitives de g sur I.
   Montrer que : $G_1(b)-G_1(a)=G_2(b)-G_2(a)$ pour tous a et b de l'intervalle I.

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux éléments de l'intervalle I.
Soit F une fonction primitive de la fonction f sur I.
Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé **l'intégrale de la fonction f de a à b.**
On le note :

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

On écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a).$$

Remarques

— Le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : « somme de $f(x)\,dx$ de a à b » ou « intégrale de $f(x)\,dx$ de a à b ».
— Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, la lettre x peut être remplacée par une autre lettre :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du.$$

Propriété fondamentale

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et si a et b sont deux éléments de I, alors :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Exemples 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

3) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$

2. Propriétés d'intégrales

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et soient a, b et c trois éléments de I.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
3. **Linéarité de l'intégrale :**

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Plus généralement, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

4. **Relation de Chasles :**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. **Intégrale et ordre :**

Si $f \leq g$ sur I et si $a \leq b$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $f \geq 0$ sur I et si $a \leq b$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

De plus :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Exercice d'application 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^{2} (x^2 + 3x - 3)\, dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} |x^2 - x|\, dx$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{x}\, dx$$

Exercice d'application 2 :

1) Montrer que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x^2+1)\, dx \geq 0.$$

2) Montrer que :

$$\int_{1}^{2} \ln(x^2+1)\, dx \geq 0.$$

3) Comparer les deux intégrales :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\ln(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln(x)\, dx.$$

3. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

S'il existe un nombre réel M tel que :

$$|f(x)| \leq M,$$

alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M(b-a).$$

Définition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. La **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Remarques

— Dans la pratique, m et M représentent respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[a, b]$.

— Si pour tout $x \in [a, b]$:

$$m \leq f(x) \leq M,$$

alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

— La formule

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

est une généralisation de la moyenne arithmétique.

Exercice d'application :

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ sur l'intervalle $[0, \ln 2]$.

Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Il existe au moins un nombre réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

II. Méthodes de calcul d'intégrales

1. Intégration par parties

On considère deux fonctions numériques u et v dérivables sur l'intervalle $[a,b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$.

On sait que :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Donc :

$$u'v = (uv)' - uv'.$$

En intégrant de a à b, on obtient :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Ainsi :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Propriété 3

Si u et v sont deux fonctions numériques dérivables sur $[a,b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Cette technique est appelée **intégration par parties**.

Exercice d'application :

Calculer :

$$1)\quad \int_1^2 xe^x\,dx$$

$$2)\quad \int_1^3 x^2\ln(x)\,dx$$

2. Primitives des fonctions continues

Fonction f	Primitives de f	Intervalle I
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto x^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + k$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x} + k$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + k$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + k$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + k$	$\mathbb{R}$
$u' + v'$	$u + v + k$	Tout intervalle où u et v sont dérivables
ku'	$ku + k$	Tout intervalle où u est dérivable
$u'v + uv'$	$uv + k$	Tout intervalle où u et v sont dérivables
$\dfrac{v'}{v^2}$	$-\dfrac{1}{v} + k$	Tout intervalle où v est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v} + k$	Tout intervalle où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$	Tout intervalle où u est strictement positive
$u'u^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{r+1}u^{r+1} + k$	Tout intervalle convenable
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + k$	Tout intervalle où u ne s'annule pas
$u'e^u$	$e^u + k$	Tout intervalle où u est dérivable

III. Interprétation géométrique d'intégrale

1. Calcul des aires

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle unité d'aire, notée u.a, l'aire du rectangle $OIKJ$ tel que :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OJ} = \vec{j}.$$

Propriété 4

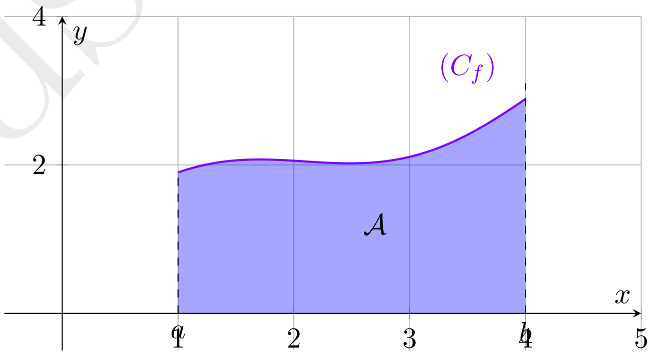
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

en unité d'aire.

Remarques

— Si f est positive sur $[a, b]$, alors :
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx.$$
— Si f est négative sur $[a, b]$, alors :
$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\, dx.$$
— Le nombre réel positif :
$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$
est appelé **l'aire géométrique**.
— Le nombre réel :
$$\int_a^b f(x)\, dx$$
est appelé **l'aire algébrique**.



Exemples 5 :

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos x.$$
Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations :
$$x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - 1.$$

Calculer l'aire $\mathcal{A}_2$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_g), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations :

$$x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad x = 0.$$

Propriété 5

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$.
L'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f), (C_g) et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Exercice d'application :

On considère les deux fonctions numériques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-x}.$$

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f), (C_g) et les deux droites d'équations :

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \ln 2.$$

2. Calcul des volumes

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
L'unité de volume est donnée par :

$$u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|.$$

Propriété 6

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthogonal.
Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a, b]$ est égal à :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

Exemple 6 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^3.$$

Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle :

$$[0, 3]\,.$$