Les équations différentielles

I. Notion d'une équation différentielle

Activité :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{-4x}$.
On pose :

$$y = f(x), \qquad y' = f'(x), \qquad y'' = f''(x).$$

Montrer que :

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Définition 1

Toute équation où l'inconnue est une fonction numérique, et qui se présente sous forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées, est appelée une **équation différentielle**.

II. Équations différentielles du premier ordre

1. L'équation différentielle $y' = ay$

Propriété 1

Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' = ay$$

sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto ke^{ax},$$

où k est un nombre réel quelconque.

Remarque

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique f de l'équation différentielle :

$$y' = ay$$

vérifiant la condition :

$$f(x_0) = y_0.$$

Exemple :

Les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) : \; y' + 2y = 0$$

sont les fonctions :

$$x \mapsto ke^{-2x} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Déterminons la solution f de l'équation (E) vérifiant :

$$f(0) = 3.$$

On a :

$$f(x) = ke^{-2x}.$$

Donc :

$$f(0) = k = 3.$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = 3e^{-2x}}.$$

Exercice d'application :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$a) \quad y' = 3y$$

$$b) \quad y' + 5y = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E): \; 3y' - 2y = 0.$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   b) Déterminer la solution de l'équation (E) vérifiant :

$$y(3) = -1.$$

2. L'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 2

Soient a et b deux nombres réels tels que : $a \neq 0$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a},$$

où k est un nombre réel quelconque.

Exercice d'application :

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E): \; y' + 2y - 4 = 0.$$

2. Déterminer la solution de l'équation (E) dont la courbe passe par le point :

$$A(-\ln 2, 6).$$

III. Équations différentielles du second ordre

1. Équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

Définition 2

Soient a et b deux nombres réels.
L'équation :

$$r^2 + ar + b = 0$$

où r est l'inconnue, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Propriété 3

Soit

$$\Delta = a^2 - 4b$$

le discriminant de l'équation caractéristique :

$$(E): \ r^2 + ar + b = 0.$$

— Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles r_1 et r_2.
Les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}.$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une seule solution réelle r_0.
Les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}.$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes :

$$r_1 = p + iq \qquad \text{et} \qquad r_2 = p - iq.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont :

$$y(x) = (\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{px}.$$

Avec :

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique $(E) : r^2 + ar + b = 0$

Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
L'équation (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2	L'équation (E) admet une seule solution réelle r_0	L'équation (E) admet deux solutions complexes $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont :

$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$	$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}$	$y(x) = \big(\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx)\big)e^{px}$

Exercice d'application :

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): \ y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$(E_2): \ y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$(E_3): \ y'' - 4y' + 13y = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E') : \; y'' - 5y' + 6y = 0.$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E').
   b) Déterminer la solution f de l'équation (E') vérifiant :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 2.$$

3. On considère l'équation différentielle :

$$(E'') : \; 3y'' + 4y = 0.$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E'').
   b) Déterminer la solution g de l'équation (E'') vérifiant :

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \text{et} \qquad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$