

Produit vectoriel dans l'espace

I. Orientation de l'espace

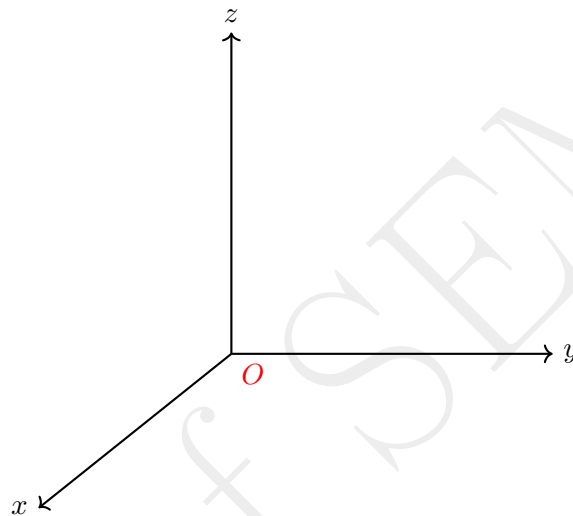
1.1. Trièdre

Définition 1

Trois demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ de même origine O et non coplanaires déterminent, dans cet ordre, un **trièdre** que l'on note :

$$(Ox; Oy; Oz).$$

Les demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ sont appelées les arêtes du trièdre $(Ox; Oy; Oz)$.



1.2. Bonhomme d'Ampère – Repère orienté

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace (\mathcal{E}) .

On pose : $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$, $\vec{OK} = \vec{k}$.

- Le **bonhomme d'Ampère** du trièdre $([OI]; [OJ]; [OK])$ est un personnage imaginaire porté sur l'axe $[OK]$.
- Le trièdre $([OI]; [OJ]; [OK])$ est dit **direct** si le bonhomme d'Ampère regardant \vec{OI} a le vecteur \vec{OJ} à sa gauche.
- Dans le cas contraire, le trièdre est dit **indirect**.

Définition 2

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **direct** lorsque le trièdre $([OI]; [OJ]; [OK])$ est direct.

Proposition 1

Si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal direct, alors :

- a) Les repères $(O; \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(O; \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ sont directs.
- b) Les repères $(O; \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $(O; \vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ et $(O; \vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ sont indirects.
- c) Les repères $(O; -\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(O; \vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ et $(O; \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ sont indirects.

II. Produit vectoriel

2.1. Définition du produit vectoriel

Définition 3

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, alors le **produit vectoriel** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , dans cet ordre, noté : $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ défini par :

- la droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB) ;
- le trièdre $([OA]; [OB]; [OC])$ est direct ;
- $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \sin \theta$ où $\theta = \widehat{AOB}$.

Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Remarques

- Le produit vectoriel des vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne dépend pas du choix du point O .
- Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur.
- Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors : $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.
- Pour tout vecteur \vec{u} : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Exemple 1 :

Soient \vec{u} et \vec{v} tels que : $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

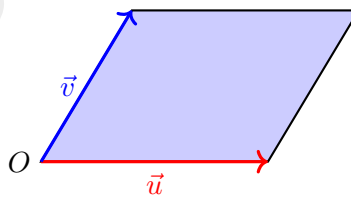
Calculons $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}; \vec{v}) = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6.$$

Donc : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 6$.

2.2. Interprétation géométrique

Le réel : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .



III. Propriétés du produit vectoriel

3.1. Antisymétrie

Proposition 2

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Le produit vectoriel est donc **antisymétrique**.

3.2. Bilinéarité

Proposition 3

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

$$\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

3.3. Expression analytique

Proposition 4

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u}(x; y; z) \quad \text{et} \quad \vec{v}(x'; y'; z')$$

alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

Exemple :

On considère : $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1)\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k}.$$

IV. Applications

4.1. Aire d'un triangle

Proposition 5

Soient A , B et C trois points non alignés.

L'aire du triangle ABC est :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|.$$

4.2. Équation d'un plan

Proposition 6

Soient A , B et C trois points non alignés.

Alors :

$$M \in (ABC) \iff \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0.$$

4.3. Intersection de deux plans

Proposition 7

Soient (P) et (P') deux plans sécants.

Si \vec{n} est un vecteur normal de (P) et \vec{n}' un vecteur normal de (P') ,

alors :

$$\vec{n} \wedge \vec{n}'$$

est un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans.

4.4. Distance d'un point à une droite

Proposition 8

Soit (D) la droite passant par A et dirigée par le vecteur \vec{u} .

La distance d'un point M à la droite (D) est donnée par :

$$d(M; (D)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$