Produit scalaire dans l'espace

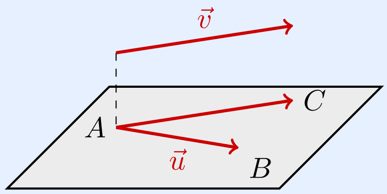
I. Produit scalaire dans l'espace

1. Définitions et notations

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}$$



Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, alors le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans tout plan contenant les points A, B et C.
Si l'un des deux vecteurs est nul, on pose : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

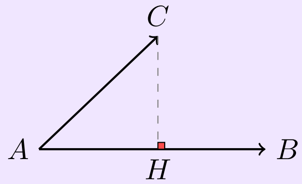
Remarques

a) Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

— Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH.$$

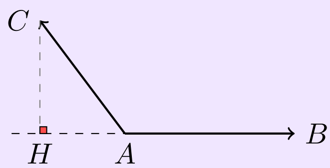
Cela correspond au cas où l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est aigu.



— Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH.$$

Cela correspond au cas où l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est obtus.



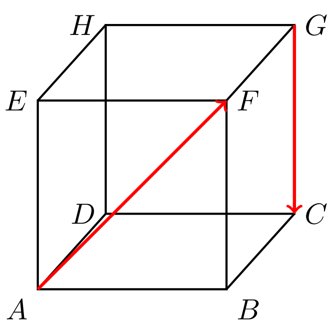
b) Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent valables dans l'espace.

Exemples :
Soit $ABCDEFGH$ un cube dont l'arête a pour longueur a.

- Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GC}$:

Puisque les faces d'un cube sont des carrés, alors : $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EA}$.
De plus, E est le projeté orthogonal de F sur (AE). Donc :

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EA}=-AE\times AE=-a^2.$$



- Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}$:

Puisque $ABCD$ est un carré, alors : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.
De plus, B est le projeté orthogonal de F sur (AB).
Donc :
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=AB\times AB=a^2.$$

Applications :

1. Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que :

$$AE=5,\qquad AB=8,\qquad AD=6.$$

Calculer :

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}, \qquad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HF}, \qquad \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG}.$$

2. Soit $ABCEFG$ un prisme droit tel que le triangle ABC soit rectangle en A.
   On suppose que :
$$AC = 3, \qquad AB = 4, \qquad AE = 8.$$
   Calculer :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}, \qquad \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AF}, \qquad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EG}.$$

2. Orthogonalité de deux vecteurs

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits **orthogonaux** si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On écrit alors : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemple :
Dans le cube $ABCDEFGH$:
$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$
De plus : $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$, donc : $\overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{GC}$.

3. Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Propriété 1

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
On a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$
$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}),$$
et :
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$
On dit que le produit scalaire est une opération **symétrique** et **bilinéaire**.

4. Norme d'un vecteur de l'espace

Définition 3

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le **carré scalaire** de $\vec{u}$ et se note : $\vec{u}^{\,2}$
Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}^{\,2}}$ s'appelle la **norme** de $\vec{u}$ et se note : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}$.

Remarque

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors : $\vec{u}^{\,2} = \overrightarrow{AB}^{\,2} = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$.

Propriété 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.
On a :
$$\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0},$$
$$\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|,$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}),$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$
De plus :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2,$$

Exemples :

1. Soient A, B et C trois points de l'espace tels que :

$$AB = 5 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3.$$

Calculons :

$$(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}.$$

On a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.$$

Donc :

$$(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = 2AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Ainsi :

$$(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 5^2 - 2 \times 3 = 44.$$

2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que :

$$\|\vec{u}\| = 2, \qquad \|\vec{v}\| = 3, \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\| = 5.$$

Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}(25 - 4 - 9) = 6.$$

II. Étude analytique du produit scalaire

1. Base orthonormale et repère orthonormal

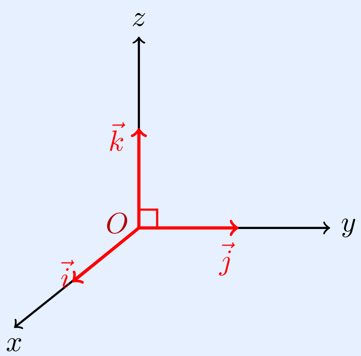
Définition 4

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace $(\mathcal{E})$.

— On dit que la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormale (ou orthonormée) lorsque :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \qquad \text{et} \qquad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$

— On dit que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormale.



Dans toute la suite, on suppose que l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. Expression analytique du produit scalaire

Propriété 3

Soient : $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace.
Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

De plus :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Exemple :
On considère :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},$$

et :

$$\vec{w}=(2m-3)\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}.$$

Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times 1+2\times(-1)+(-1)\times 3=-3.$$

De plus :

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=2(2m-3)+2-m=3m-4.$$

On a :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$$

et :

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}.$$

Pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux, il faut :

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \iff 3m-4=0 \iff m=\frac{4}{3}.$$

Propriété 4

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace.
Alors :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

3. Ensemble des points M tels que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$

Propriété 5

Soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul de l'espace, A un point et k un réel.
L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ est un plan dont une équation cartésienne est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Exemple :
Soient :

$$A(-1;3;2) \qquad \text{et} \qquad \vec{u}(2;1;-3).$$

Déterminons l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=7.$$

On a :

$$2(x+1)+(y-3)-3(z-2)=7.$$

Donc l'ensemble est le plan :

$$2x+y-3z-2=0.$$

III. Plan défini par un point et un vecteur normal

1. Vecteur normal à un plan

Définition 5

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est dit **normal** à un plan (P) lorsque toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan (P).

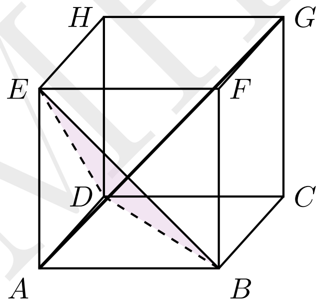
Méthode

Pour montrer qu'un vecteur non nul est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Exemple :

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Démontrons que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) :



— Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EB}$.
En effet,
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$$
car :
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EB}.$$
Or :
$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}=0$$
et
$$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{FG}\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})=\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FB}=0.$$

— De même, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ED}$.
En effet,
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=0$$
car :
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG})\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{ED}.$$
Or :
$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{ED}=0$$
et
$$\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{HG}\cdot(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD})=\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{HD}=0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ ne sont pas colinéaires ;
donc $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

2. Équation cartésienne d'un plan

Propriété 6

Soient a, b, c et d des nombres réels tels que : $(a;b;c)\neq(0;0;0)$.
Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation cartésienne de la forme :
$$ax+by+cz+d=0.$$
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est : $\vec{n}(a;b;c)$.

Exemple :
Déterminons une équation du plan (P) passant par : $A(-1;2;1)$ et de vecteur normal : $\vec{n}(2;1;-3)$.
Une équation de (P) s'écrit :
$$2x+y-3z+d=0.$$
Comme $A\in(P)$:
$$2(-1)+2-3(1)+d=0.$$

Donc :

$$d = 3.$$

Ainsi :

$$(P) : 2x + y - 3z + 3 = 0.$$

Applications :

1. Déterminer un vecteur normal au plan (P) dans chacun des cas suivants :

$$(P) : 2x - y + 8z - 1 = 0,$$

$$(P) : 3x - 2z + 10 = 0,$$

$$(P) : 2y + 3 = 0.$$

2. Déterminer une équation du plan (Q) passant par $B(-1;0;3)$ et de vecteur normal : $\vec{n}(2;-3;4)$.
3. On considère :

$$A(1;-1;1), \quad B(0;2;-1), \quad C(-1;1;0).$$

   a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Montrer que $\vec{n}(1;3;4)$ est normal au plan (ABC).

3. Parallélisme et orthogonalité

Propriété 7

Soient (P) et (P') deux plans et (D) une droite de l'espace.
Soient $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ deux vecteurs normaux respectivement à (P) et (P'), et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D).

1. (P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
2. (P) et (P') sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.
3. (D) est parallèle au plan (P) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
4. (D) est perpendiculaire au plan (P) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Exemples :

1. On considère : $(P) : 2x - 4y + z + 1 = 0$ et : $(P') : x + y + 2z - 3 = 0$.
   Un vecteur normal à (P) est : $\vec{n}(2;-4;1)$, et un vecteur normal à (P') est : $\vec{n}'(1;1;2)$.
   On a :

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 - 4 + 2 = 0.$$

   Donc :

$$(P) \perp (P').$$

2. Déterminer une équation du plan (Q) passant par $A(1;-1;1)$ et parallèle au plan :

$$(Q') : 3x + y - 5z = 0.$$

   Puisque $(Q)//(Q')$, le vecteur $\vec{n}(3;1;-5)$ est normal au plan (Q).
   Donc :

$$(Q) : 3x + y - 5z + d = 0.$$

   Comme $A \in (Q)$:

$$3 - 1 - 5 + d = 0.$$

   Donc :

$$d = 3.$$

   Ainsi :

$$(Q) : 3x + y - 5z + 3 = 0.$$

Applications :
On considère les plans : $(P) : 2x - 3y + z + 1 = 0$ et : $(Q) : (m-1)x + 2y + (2m-3)z + 7 = 0$.

1. Déterminer la valeur de m pour laquelle (P) et (Q) sont orthogonaux.
2. Déterminer une équation du plan (P') passant par $A(-1;-1;0)$ et parallèle au plan (P).

4. Distance d'un point à un plan

Définition 6

Soit (P) un plan et A un point de l'espace.
La distance du point A au plan (P), notée $d(A;(P))$, est la distance : AH où H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P).

Propriété 8

La distance du point $A(x_A;y_A;z_A)$ au plan (P) d'équation : $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d(A;(P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exemple :
On considère le plan : $(P) : 2x - y + 2z + 3 = 0$ et les points : $A(1;-1;2)$ et $B(0;2;-2)$.
Alors : $d(A;(P)) = \dfrac{|2+1+4+3|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{10}{3}$, et : $d(B;(P)) = \dfrac{|0-2-4+3|}{3} = 1$.

Applications :

1. On considère : $(P) : x + y - z + 1 = 0$ et : $(Q) : 2x + y + 2z - 3 = 0$.
   a) Calculer $d(A;(P))$ et $d(A;(Q))$ sachant que : $A(2;1;-1)$.
   b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que : $d(M;(P)) = d(M;(Q))$.
2. On considère : $A(1;-1;2)$, $B(2;0;1)$, et les plans : $(P) : x+y-z-1 = 0$ et : $(Q) : 2x+y-z+1 = 0$.
   a) Calculer la distance du point A au plan (P).
   b) Montrer que B est le projeté orthogonal de A sur (P).
   c) Calculer $d(A;(Q))$. Que peut-on en déduire ?
3. On considère : $A(-1;1;1)$ et : $(P) : 2x - y + z - 2 = 0$.
   a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (P).
   b) Pour tout réel m, on pose : $(Q_m) = \{M \ / \ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AH} = m\}$. Déterminer analytiquement (Q_m).
   c) Déterminer m tel que : $d(A;(Q_m)) = d(A;(P))$.

IV. Sphère dans l'espace

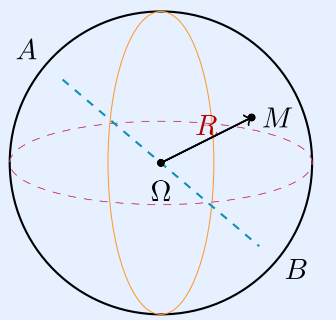
1. Définition

Définition 7

Soit Ω un point de l'espace et R un réel positif.

La sphère $(\mathcal{S})$ de centre Ω et de rayon R
est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\Omega M = R$.
On la note : $S(\Omega;R)$.

Soient A et B deux points de la sphère $(\mathcal{S})$.
Le segment $[AB]$ est appelé diamètre de la sphère $(\mathcal{S})$
lorsque le centre Ω de la sphère $(\mathcal{S})$ est le milieu du segment $[AB]$.



2. Équation cartésienne d'une sphère

Propriété 9

Soient $R > 0$ et $\Omega(a; b; c)$ un point de l'espace.
Une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Exemple :
Soit (S) la sphère de centre : $\Omega(1; -1; 2)$ et de rayon : $R = 3$.
Alors une équation cartésienne de (S) est :

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

En développant :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0.$$

Applications :
Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et de rayon R dans les cas suivants :

$$\Omega(2; 0; -1), \quad R = \sqrt{2},$$
$$\Omega(-3; 1; -2), \quad R = \frac{3}{2}.$$

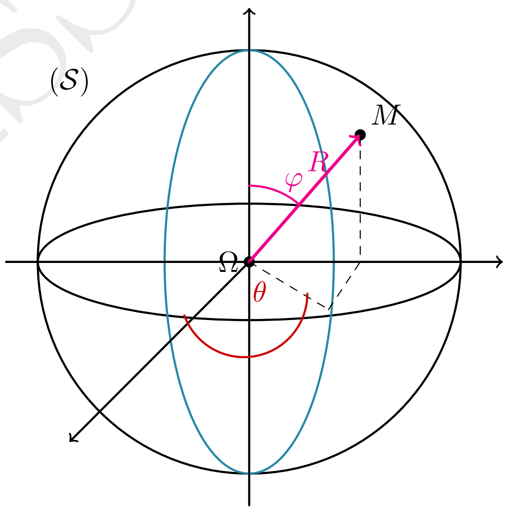
3. Représentation paramétrique d'une sphère

Propriété 10

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R.
Un point $M(x; y; z)$ appartient à (S) si, et seulement si, il existe $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x = a + R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = b + R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c + R\cos\varphi. \end{cases}$$

Ce système est appelé une **représentation paramétrique** de la sphère.



Exemples :

1. Une représentation paramétrique de la sphère de centre $\Omega(-1; 0; 2)$ et de rayon $R = 3$ est :

$$\begin{cases} x = -1 + 3\sin\varphi\cos\theta, \\ y = 3\sin\varphi\sin\theta, \\ z = 2 + 3\cos\varphi. \end{cases}$$

2. Le système :
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 2\sin\varphi\cos\theta, \\ y = -1 + 2\sin\varphi\sin\theta, \\ z = 1 + 2\cos\varphi \end{cases}$$
représente la sphère de centre : $\Omega\left(\dfrac{1}{2}; -1; 1\right)$ et de rayon : $R = 2$.

4. Reconnaître une sphère

Propriété 11

Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

1. Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, alors (S) est la sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon :
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$
2. Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, alors :
$$(S) = \{\Omega(a; b; c)\}.$$
3. Si : $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, alors :
$$(S) = \varnothing.$$

Exemples :

1. L'ensemble : $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$ est une sphère de centre : $\Omega_1(1; 3; 2)$ et de rayon : $R_1 = \sqrt{14}$.
2. L'ensemble : $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$ vérifie : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$. Donc : $(S_2) = \{(3; -2; -3)\}$.
3. L'ensemble : $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$ donne, après complétion des carrés :
$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2}.$$
Donc : $(S_3) = \varnothing$.

Applications :

Déterminer l'ensemble des points $M(x; y; z)$ dans chacun des cas suivants :
$$(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y = 0,$$
$$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 4z + \frac{13}{2} = 0,$$
$$(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 2z - \frac{7}{2} = 0,$$
$$(S_4) : x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y - 2z + 9 = 0.$$

5. Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Propriété 12

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
2. Si : $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors une équation cartésienne de cette sphère est :
$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$

Exemple :
Soient :

$$A(-1;2;1) \quad \text{et} \quad B(1;-1;0).$$

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
Son équation est : $(x+1)(x-1)+(y-2)(y+1)+(z-1)z = 0$.
Donc :

$$x^2+y^2+z^2-y-z-3=0.$$

Applications :
On considère les points : $A(2;0;1)$, $B(1;-1;1)$, $C(0;0;-1)$.

1. a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.
   b) Calculer : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Que peut-on en déduire ?
2. a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AC]$.
   b) En déduire le centre et le rayon de cette sphère.

6. Intersection d'une sphère et d'une droite

Exemples :

1. Soit (S) la sphère : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 9$ et la droite (D) :

$$\begin{cases} x = 1-k, \\ y = 1+k, \\ z = 1+k. \end{cases}$$

   On remplace dans l'équation de la sphère : $k^2+k^2+(k-1)^2 = 9 \iff 3k^2-2k-8=0$.
   Donc :

$$k = 2 \quad \text{ou} \quad k = -\frac{4}{3}.$$

   Ainsi la droite coupe la sphère en deux points.
2. Soit (S) : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0$ et (D) :

$$\begin{cases} x = 2+3t, \\ y = 4+t, \\ z = -2+5t. \end{cases}$$

   Après substitution : $35t^2 = 0$. Donc $t = 0$ et la droite est tangente à la sphère.
3. Soit (S) : $x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0$ et (D) :

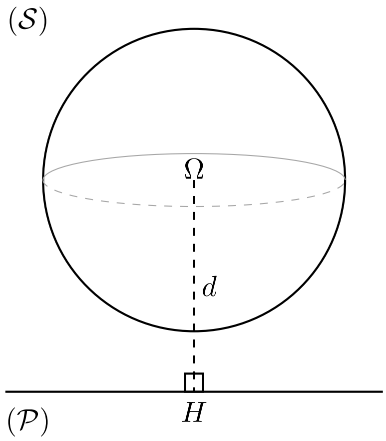
$$\begin{cases} x = -1+k, \\ y = 1+2k, \\ z = 2. \end{cases}$$

   Après substitution : $5k^2+1=0$.
   Cette équation n'a pas de solution réelle, donc la droite est extérieure à la sphère.

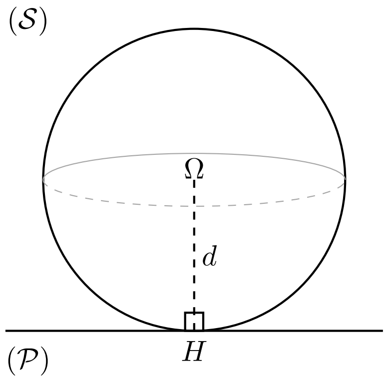
Propriété 13

Soient $S(\Omega;R)$ une sphère et (D) une droite de l'espace.
On désigne par d la distance du point Ω à la droite (D), et par H le projeté orthogonal de Ω sur (D).

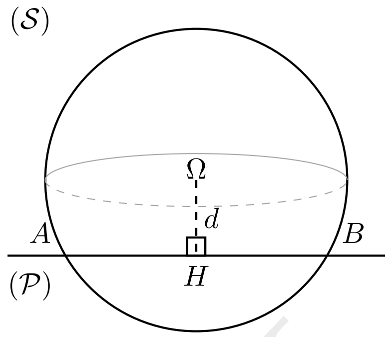
1. Si $d > R$, alors : $(D) \cap (S) = \varnothing$. La droite est extérieure à la sphère.
2. Si $d = R$, alors : $(D) \cap (S) = \{H\}$. La droite est tangente à la sphère en H.
3. Si $d < R$, alors la droite coupe la sphère en deux points.



$(\mathcal{P})$ est à l'extérieur de $(\mathcal{S})$



$(\mathcal{P})$ est tangente à $(\mathcal{S})$



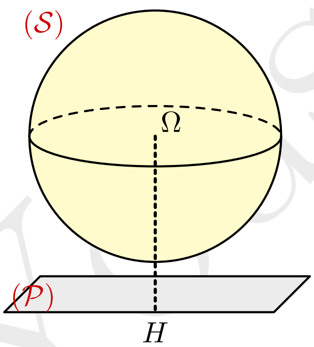
$(\mathcal{P})$ coupe $(\mathcal{S})$ en deux points

7. Intersection d'une sphère et d'un plan

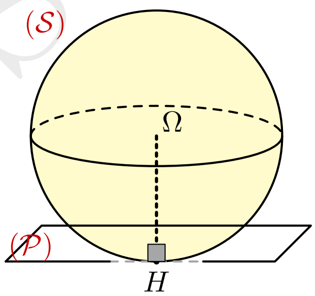
Propriété 14

Soient $S(\Omega; R)$ une sphère et (P) un plan de l'espace.
On désigne par d la distance du point Ω au plan (P) et par H le projeté orthogonal de Ω sur (P).

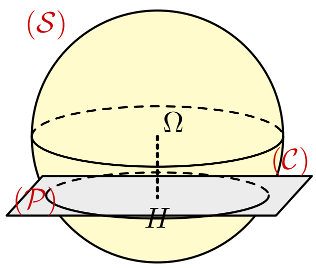
1. Si $d > R$, alors :
$$(P) \cap (S) = \varnothing.$$
Le plan est extérieur à la sphère.
2. Si $d = R$, alors :
$$(P) \cap (S) = \{H\}.$$
Le plan est tangent à la sphère en H.
3. Si $d < R$, alors :
$$(P) \cap (S)$$
est un cercle de centre H et de rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



$(\mathcal{P})$ est à l'extérieur de $(\mathcal{S})$



$(\mathcal{P})$ est tangente à $(\mathcal{S})$



$(\mathcal{P})$ coupe $(\mathcal{S})$ suivant un cercle $(\mathcal{C})$

Exemples :

1. Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 = 0$ et le plan : $(P) : 2x - y - z + 5 = 0$.
On a :
$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 6.$$
Donc (S) est de centre $\Omega(1; 1; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{6}$.
De plus :
$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2 - 1 + 5|}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{6}.$$

Donc le plan est tangent à la sphère.

2. Soit $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ et : $(P) : x - y - z - 3 = 0$.
   On obtient un centre $\Omega(1; 0; -1)$ et un rayon $R = 1$.
   Or :
$$d(\Omega; (P)) = \sqrt{3} > R.$$
   Donc :
$$(S) \cap (P) = \varnothing.$$
3. Soit $(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$ et : $(P) : 2x - y + 3z - 2 = 0$.
   Le centre est : $\Omega(2; 1; -3)$ et $R = 3$.
   On a :
$$d(\Omega; (P)) = \frac{|4 - 1 - 9 - 2|}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7} < R.$$
   Donc le plan coupe la sphère suivant un cercle de centre H, projeté orthogonal de Ω sur (P), et de rayon :
$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{31}{7}}.$$

Applications :

1. Étudier l'intersection de la sphère (S) et du plan (P) dans chacun des cas suivants :
$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0, \qquad (P) : x - 2y + 2z - 3 = 0.$$
$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0, \qquad (P) : x - 2y + 2z - 3 = 0.$$
$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0, \qquad (P) : x + y + z - 4 = 0.$$
2. Donner une équation de la sphère de centre $\Omega(-1; 2; 3)$ et tangente au plan :
$$(P) : x - 2y + 2z + 1 = 0.$$

Propriété 15

Soit (S) une sphère de centre Ω et soit $A \in (S)$.
Il existe un seul plan (P) tangent à la sphère (S) en A.
Il est défini par :
$$M \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0.$$
Une équation cartésienne de ce plan est :
$$(x_\Omega - x_A)(x - x_A) + (y_\Omega - y_A)(y - y_A) + (z_\Omega - z_A)(z - z_A) = 0.$$