CALCUL INTEGRAL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

CALCUL INTEGRAL

♦ *Intégrale et Primitives :*

- Si F est une primitive de f sur I alors $\forall\ a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

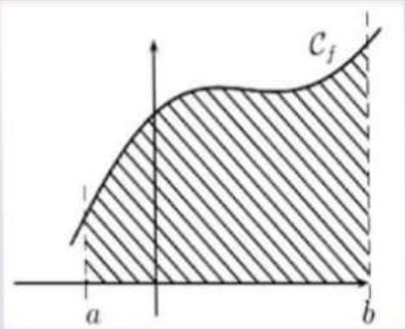
- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors, $g'(x) = f(x)$ et donc g est la primitive de f qui s'annule en a

♦ Propriétés de l'intégrale :

- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Antisymétrie :** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- **Linéarité :** $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- **Positivité :** $f \geq 0 \ sur \ [a\,;b], a \leq b \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Conservation de l'ordre :** $f \geq g \ sur \ [a\,;b], a \leq b \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- **Inégalité de la moyenne :** $\begin{cases} m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ |f| \leq M \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a| \end{cases}$
- **Valeur moyenne : la valeur moyenne de $\boldsymbol{f}$ sur $[\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}]$:** $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
- **Intégration par parties :** $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

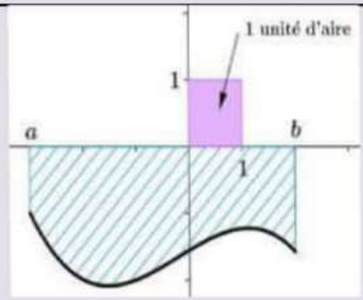
♦ *Calcul d'aires :*

f est positive



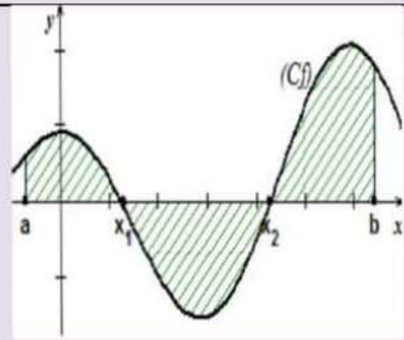
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \times ua$$

f est négative



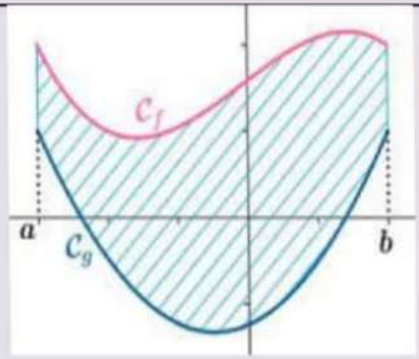
$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx \times ua$$

f est de signe quelconque



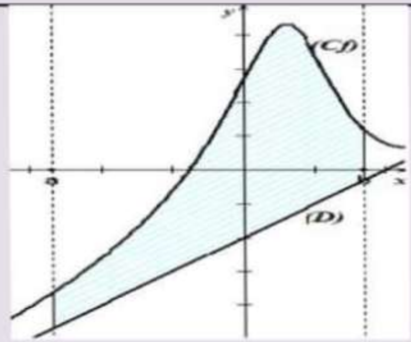
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

Aire entre deux courbes

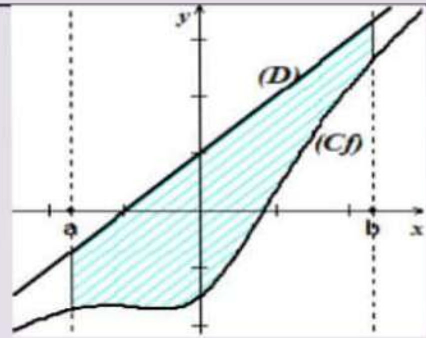


$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times ua$$

Aires entre une courbe et une droite

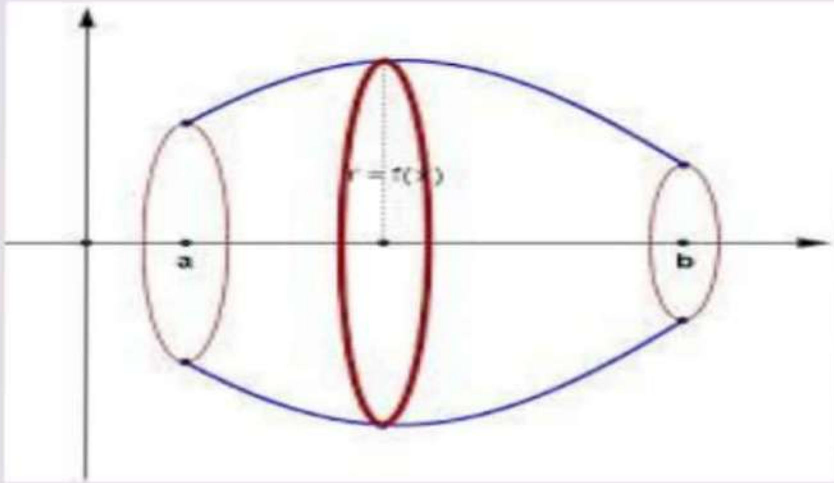


$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y]dx \times ua$$



$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)]dx \times ua$$

- ***Calcul de Volumes :***

Volume du solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses	
L'espace étant rapporté à un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, la rotation de la partie du plan $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ délimité par la courbe$\left(\mathcal{C}_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution.	 $\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \times uv$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Au programme		
Equations différentielles	**Solution générale**	**Solution particulière**
$y' = ay\ (a\ réel)$	$y = ke^{ax}\ avec\ k \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant à la condition initiale$y(x_0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ avec $A \in \mathbb{R}\ et\ B \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0\ et\ y'(x_0) = y'_0$

Hors programme	
Equation différentielle	**Solution**
$ay'' + by' + c = 0$	Elle s'exprime à l'aide des racines r_1 et r_2 de son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. • Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors r_1 et r_2 sont réels et $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $r_1 = r_2 = r_0$ est réel et $y = (Ax + B)e^{r_0 x}$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont complexes conjugués et $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ Dans tous les cas, Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$

♦ Opérations et dérivées :

Opérations et dérivées		Dérivées successives
• $(u+v)' = u' + v'$ • $(ku)' = ku'(k \text{ réel})$ • $(uv)' = u'v + v'u$ • $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}(u \neq 0)$ • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}(v \neq 0)$ • $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ • $(u^n)' = nu'u^{n-1}\ (n \geq 2)$	• $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}(n \geq 1)$ • $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}(u > 0)$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}(u > 0)$ • $(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}(u \neq 0)$ • $(e^u)' = u'e^u$	$\begin{cases} \circ\ f^{(0)} = f \\ \circ\ f^{(1)} = f' \\ \circ\ f^{(2)} = f'' \\ \circ\ f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]' \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

Dérivée d'une bijection réciproque

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ f \text{ est bijective de } I \text{ sur } J \\ \circ\ f \text{ est dérivable sur } I \\ \circ\ \forall\, x \in I, f'(x) \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases}\circ\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \circ\ \forall\, y \in J, (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}\end{cases}$$

- ***Dérivée et sens de variation :***

Soit f' la fonction dérivée de f sur I :

- Si $\forall\, x \in I, f'(x) > 0$, alors, f est strictement croissante sur I
- Si $\forall\, x \in I, f'(x) < 0$, alors, f est strictement décroissante sur I
- Si $\forall\, x \in I, f'(x) = 0$, alors, f est constante sur I

♦ Dérivée et extrémum relatif :

Si f' s'annule x_0 et change de signe alors f admet un extrémum relatif en x_0	
Plus précisément	$\left.\begin{array}{l}\circ\ \forall\, x \in \,]a\,;\, x_0[,\, f'(x) < 0 \\ \circ\ \forall\, x \in \,]x_0\,;b[,\, f'(x) > 0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)\ \ (minimum)$
	$\left.\begin{array}{l}\circ\ \forall\, x \in \,]a\,;\, x_0[,\, f'(x) > 0 \\ \circ\ \forall\, x \in \,]x_0\,;b[,\, f'(x) < 0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\ \ (maximum)$

PRIMITIVES

- *Primitives des fonctions usuelles :*

F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$		
Fonction	**Primitives**	I
$f(x) = 0$	$F(x) = k \ (k \text{ réel})$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} (n \geq 2)$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k \ (n \geq 2)$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitives	I
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + k$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$

- ***Primitives et opérations :***

On suppose que u est une fonction dérivable sur I				
$f = u'u^n$	$F = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$		$f = u' \cos u$	$F = \sin u$
$f = \dfrac{u'}{u^2}$	$F = -\dfrac{1}{u} (u \neq 0\ sur\ I)$		$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$
$f = \dfrac{u'}{u^n}$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ $(u \neq 0\ sur\ I\ et\ n \geq 2)$		$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\lvert u\rvert\ (u \neq 0\ sur\ I)$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} (u > 0\ sur\ I)$		$f = u'e^u$	$F = e^u$