GEOMETRIE DANS L'ESPACE

♦ Egalité de deux vecteurs et Relation de Chasles :

- **Egalité** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme
- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

♦ Colinéarité :

- **Définition**

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$
- **Parallélisme**

  $(AB) \mathbin{//} (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$
- **Appartenance à une droite et alignement**

  ✓ $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

  ✓ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

♦ Plans de l'espace et coplanarité :

- **Définition**

  Trois points non alignés A , B , C définissent un plan noté (ABC)

- **Coplanarité**

  ✓ Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ou si et seulement si, $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = 0$

  ✓ Les points A , B , C , D sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ou si et seulement si, $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD} = 0$

♦ Produit scalaire et orthogonalité :

- **Définition**

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$$

- **Orthogonalité**

  ✓ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

  ✓ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

  ✓ ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

♦ Géométrie analytique :

Soit $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- Le milieu I de $[AB]$ est tel que $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ et $k\vec{u}$ sont tels que $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$
- Si le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé alors :

  ✓ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

  ✓ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M\left(\frac{p}{2}+t\right)}$:**

  ✓ L'intervalle $[0\,;\,p]$ est de longueur p

  ✓ $[0\,;\,p]=\left[0\,;\,\frac{p}{2}\right]\cup\left[\frac{p}{2}\,;p\right]$ et $\forall\, t\in\left[0\,;\,\frac{p}{2}\right],\ \left(\frac{p}{2}+t\right)\in\left[\frac{p}{2}\,;\,p\right]$

  ✓ $M\left(\frac{p}{2}+t\right)=S_{(?)}(M(t))$

  Conclusion : On a $(\Gamma)=(\Gamma_0)\cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0\,;\,\frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0\,;\,\frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M\left(\frac{p}{2}-t\right)}$:**

  ✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{4}\,;\,\frac{3p}{4}\right]$ est de longueur p

  ✓ $\left[-\frac{p}{4}\,;\,\frac{3p}{4}\right]=\left[-\frac{p}{4}\,;\,\frac{p}{4}\right]\cup\left[\frac{p}{4}\,;\,\frac{3p}{4}\right]$ et $\forall\, t\in\left[-\frac{p}{4}\,;\,\frac{p}{4}\right],\ \left(\frac{p}{2}-t\right)\in\left[\frac{p}{4}\,;\,\frac{3p}{4}\right]$

  ✓ $M\left(\frac{p}{2}-t\right)=S_{(?)}(M(t))$

  Conclusion : On a $(\Gamma)=(\Gamma_0)\cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[-\frac{p}{4}\,;\,\frac{p}{4}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[-\frac{p}{4}\,;\,\frac{p}{4}\right]$

♦ *Tableau conjoint des variations :*

Supposons que l'intervalle d'étude réduit trouvé est $[a\ ;\ b]$

- Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$
- Etudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle $[a\ ;b]$
- Pour chaque valeur particulière t_0 de t trouvée, calculer les quatre quantités $x'(t_0)$; $y'(t_0)$; $x(t_0)$ et $y(t_0)$
- Compléter le tableau ci-dessous par les signes $x'(t)$ et $y'(t)$ainsi que les flèches indiquant les variations de x et y

t	a	t_0	t_1	...	b
$x'(t)$	$x'(a)$	$x'(t_0)$	$x'(t_1)$		$x'(b)$
$y'(t)$	$y'(a)$	$y'(t_0)$	$y'(t_1)$		$y'(b)$
$x(t)$	$x(a)$	$x(t_0)$	$x(t_1)$		$x(b)$
$y(t)$	$y(a)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$		$y(b)$

♦ *Notion de tangentes au point $M(t_0)$:*

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors (T): $x = x(t_0)$ (verticale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors (T): $y = y(t_0)$ (horizontale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors (T): $y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}\big(x - x(t_0)\big) + y(t_0)$ (oblique)
- Le cas $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ est hors programme

♦ *Points d'intersection avec les axes du repère :*

- **Avec l'axe des abscisses :** Chercher $M(t)\big(x(t)\,;y(t)\big)$ tel que $y(t) = 0$
- **Avec l'axe des ordonnées :** Chercher $M(t)\big(x(t)\,;y(t)\big)$ tel que $x(t) = 0$

♦ *Les étapes du tracé de la courbe* (Γ) :

- Tracer un repère $(O\ ;\ \vec{i}\,,\vec{j})$ (respecter l'unité graphique si elle est donnée)
- Placer les points $M(a)\ ;\ M(t_0)\ ;\ M(t_1)\ ;\ \cdots;\ M(b)$ et tracer en chacun de ces points la tangente à la courbe
- Respecter l'évolution du tracer selon le tableau conjoint

  De $M(a)\ vers\ M(t_0)$; de $M(t_0)\ vers\ M(t_1)$; $de\ M(t_1)\ vers \cdots vers\ M(b)$

1er cas

t	
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\nearrow$

On se déplace vers la droite et vers le haut

2ème cas

t	
$x(t)$	$\nearrow$
$y(t)$	$\searrow$

On se déplace vers la droite et vers le bas

3ième cas

t	
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\nearrow$

On se déplace vers la gauche et vers le haut

4ième cas

t	
$x(t)$	$\searrow$
$y(t)$	$\searrow$

On se déplace vers la gauche et vers le bas